Université de Strasbourg
U.F.R. de Mathématique et d'Informatique
Licence L3 2025/26 , Bases de la géométrie differentielle S5

Décembre 2025
Carlo GASBARRI

Troisieme Contrôle **Section mathématiques fondamentales**

Durée de l'épreuve : 2h.

L'usage de calculatrices et de documents n'est pas autorisé.
Résoudre les exercices suivants et justifier les réponses.

Exercice 1. Montrer que, si (a,b) est un couple de réels suffisamment proche de $(1,-1)$, le système d'équations suivant admet une solution :

$$\begin{cases} x\,e^y + y = a \\ x\,e^y - y = b. \end{cases}$$

Solution. On se donne la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$F(x,y) = (xe^y + y, xe^y - y).$$

Remarquons tout d'abord que $F(0,1) = (1,-1)$. De plus, F est lisse comme somme et produit de fonctions lisses, et on a

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y + 1 \\ e^y & xe^y - 1 \end{pmatrix},$$

qui a pour déterminant $\det J_f(x,y) = e^y(xe^y - 1 - xe^y - 1) = -2e^y$. En particulier, $\det J_f(0,1) = -2e \neq 0$, et d'après le théorème d'inversion locale, F est un difféomorphisme entre un voisinage de $(0,1)$ et un voisinage de $(-1,1)$. Cela répond donc à la question. $\square$

Exercice 2. Montrer que l'équation

$$e^{x+yz} + (x+z)\,y^2 + y = 2$$

détermine y comme une fonction de x et z au voisinage de $x = z = 0$, et calculer le gradient de cette fonction en $(0,0)$.

Démonstration. On se donne la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y,z) = e^{x+yz} + (x+z)y^2 + y - 2.$$

C'est une fonction lisse comme somme, produit et composée de fonctions lisses, et on peut calculer son gradient pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x+yz} + y^2 \\ ze^{x+yz} + 2(x+z)y + 1 \\ ye^{x+yz} + y^2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour $(x,y,z) = (0,1,0)$, on a $F(0,1,0) = 0$, et

$$\nabla F(0,1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En particulier $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0) = 1 \neq 0$, donc d'après le théorème des fonctions implicites, au voisinage de $(0,1,0)$, on peut écrire y en fonction de x et z. On a ensuite d'après le cours (que l'on peut retrouver en calculant la différentielle de $(x,z) \mapsto F(x, y(x,z), z)$)

$$\frac{\partial y}{\partial z}(0,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(0,1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,0)} = -2.$$

$\square$

Exercice 3. On considère la surface S d'équation $F(x,y,z) = 0$ pour $F(x,y,z) = x^2 + ye^z$.

a) Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla F(x,y,z)$ est orthogonal au plan tangent à S en (x,y,z).

b) Trouver l'ensemble des points (x,y,z) de S pour lesquels le plan tangent est orthogonal au vecteur $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Solution. a) L'équation du plan tangent à S en (x,y,z) est donnée par

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)(x'-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)(y'-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)(z'-z) = 0,$$

ce qui se réécrit

$$\langle \nabla F(x,y,z), \vec{v} \rangle = 0,$$

où $\vec{v} = \vec{PP'}$, avec P le point de coordonnées (x,y,z) et P' le point de coordonnées (x',y',z'). Or, par définition, tout vecteur tangent est de cette forme, donc on en déduit bien que $\nabla F(x,y,z)$ est orthogonal à tout vecteur tangent à S en (x,y,z), et a fortiori au plan tangent tout entier.

b) D'après la question précédente, cela revient à trouver (x,y,z) tel que $\nabla F(x,y,z)$ est colinéaire à w. Or

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ e^z \\ ye^z \end{pmatrix},$$

donc il s'agit de trouver l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et des (x,y,z) tels que $F(x,y,z) = 0$ et

$$\begin{cases} 2x &= 2\lambda \\ e^z &= -\lambda \\ ye^z &= 3\lambda. \end{cases}$$

Cela donne $x = \lambda = -e^z$ et $ye^z = 3\lambda = 3x$. En particulier, $ye^z = -3e^z$ donc $y = -3$. Or, comme $(x,y,z) \in S$ on doit avoir $F(x,-3,z) = 0$, ce qui donne

$$x^2 - 3e^z = 0 = (-e^z)^2 - 3e^z = e^z(e^z - 3),$$

donc $z = \ln(3)$. Enfin on en déduit que $x = -e^z = -3$, d'où $(x,y,z) = (-3,-3,\ln(3))$.

$\square$

Exercice 4. On considère deux surfaces S et T de $\mathbb{R}^3$: S est la surface d'équation $x^2 + y^2 - z = 0$, et T est la surface paramétrée par :

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \mapsto & (u^2 - v^2,\ 2uv,\ u+v). \end{array}$$

a) Déterminer un vecteur normal à S en un point $p \in S$.

b) Déterminer les points réguliers du paramétrage σ, et un vecteur normal $N_T(u,v)$ en tout point régulier $q = \sigma(u,v)$.

c) Déterminer l'ensemble des couples $(p,q) \in S \times T$ tels que les plans tangents en p et en q soient parallèles.

Solution. a) Un vecteur normal à S en p est par exemple $\nabla F(p)$ (cf. Exercice 3), c'est-à-dire, si $p = (x,y,z)$,

$$\nabla F(p) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Pour déterminer les points réguliers du paramétrage, regardons la jacobienne de σ :

$$J_\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $u \neq v$, alors

$$\begin{vmatrix} 2v & 2u \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(v-u) \neq 0$$

et la jacobienne est de rang 2. Si $u = v$, alors

$$\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(u+v),$$

et le déterminant est non nul si $(u,v) \neq (0,0)$. Donc tout point $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un point régulier du paramétrage. En revanche, on peut vérifier que pour $(0,0)$ la jacobienne n'a aucun mineur de rang 2 non nul donc ce n'est pas un point régulier. Le plan tangent en $q = \sigma(u,v)$ est notamment engendré par $\sigma_1(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$ et $\sigma_2(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$, et le vecteur $N_T(u,v) = \sigma_1(u,v) \times \sigma_2(u,v)$ est par construction un vecteur normal. On obtient

$$N_T(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2v \\ 2u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(v-u) \\ -2(u+v) \\ 4(u^2+v^2) \end{pmatrix}.$$

c) Pour que les plans tangents en p et q soient parallèles, il suffit que les vecteurs normaux soient colinéaires. On cherche donc à résoudre

$$\nabla F(p) = \lambda N_T(u,v),$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Cela revient à trouver $(x,y,z) \in S$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda(v-u) \\ -2\lambda(u+v) \\ 4\lambda(u^2+v^2) \end{pmatrix}.$$

On trouve $u^2 + v^2 = -\frac{1}{4\lambda}$ donc (u,v) se trouvent sur un cercle de rayon $R > 0$, et on a $\lambda = -\frac{1}{4R}$. à partir de là, on peut exprimer x et y à l'aide de (u,v) :

$$x = \frac{u-v}{2(u^2+v^2)}, \quad y = -\frac{u+v}{2(u^2+v^2)},$$

et enfin on peut retrouver z à partir de l'équation de S :

$$z = x^2 + y^2 = \frac{(u-v)^2 + (u+v)^2}{4(u^2+v^2)^2} = \frac{1}{4(u^2+v^2)}.$$

On peut enfin tout réexprimer en termes de coordonnées polaires $u = R\cos\theta, v = R\sin\theta$, et on obtient

$$p = \begin{pmatrix} \frac{\cos\theta - \sin\theta}{2R} \\ -\frac{\cos\theta + \sin\theta}{2R} \\ \frac{1}{4R^2} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ 2R^2\cos\theta\sin\theta \\ R(\cos\theta + \sin\theta) \end{pmatrix},$$

pour tout $R > 0$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$.

$\square$

Exercice 5. Calculer l'aire de la portion du plan P d'équation $2x + y + z = 3$ qui se trouve dans le premier octant, c'est-à-dire dans l'espace $(\mathbb{R}_+)^3$ des points dont les trois coordonnées sont positives ou nulles.

Solution. On commence par trouver un paramétrage du plan, en écrivant z en fonction de x et y, c'est-à-dire $z = 3 - 2x - y$. On obtient $\sigma(s,t) = (s, t, 3 - 2s - t)$. La portion qui nous intéresse correspond à

$$\Sigma = \{(s,t) \in [0,\infty)^2 : 3 - 2s - t \geq 0\}.$$

En particulier on voit que $s \in [0, \frac{3}{2}]$, $t \in [0,3]$, de sorte que

$$\Sigma = \{(s,t) \in (\mathbb{R}_+)^2 : 0 \leq s \leq \frac{3}{2}, 0 \leq t \leq 3 - 2s\}.$$

On pose

$$\sigma_1(s,t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2(s,t) = \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et on a

$$\sigma_1(s,t) \times \sigma_2(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et on a alors

$$A(\Sigma) = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{3-2s} \|\sigma_1(s,t) \times \sigma_2(s,t)\| dt \right) ds = \sqrt{6} \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{3-2s} dt \right) ds.$$

On calcule l'intégrale :

$$\begin{aligned} A(\Sigma) =& \sqrt{6} \int_0^{\frac{3}{2}} (3 - 2s) ds \\ =& \sqrt{6} [3s - s^2]_0^{\frac{3}{2}} \\ =& \frac{9\sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

□

Exercice 6. Considérons la couronne :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\},$$

et la 1-forme $\omega \in \Omega^1(U)$ suivante :

$$\omega = \frac{(x - y)\, dx + (x + y)\, dy}{x^2 + y^2}.$$

a) Vérifier que ω est *fermée*.

b) Montrer que ω n'est *pas exacte* sur U. Indication : raisonner par l'absurde et intégrer ω le long d'un cercle contenu dans U.

Solution. a) Soit $(x,y) \in U$. On a $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec

$$P(x,y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2},$$

donc

$$\begin{aligned}
d\omega =&dP(x,y)\wedge dx + dQ(x,y)\wedge dy\\
=&\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)dx\wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx\wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)dy\wedge dy\\
=&\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dx\wedge dy.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) =&\frac{-(x^2+y^2)-2y(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) =&\frac{x^2+y^2-2x(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

d'où le fait que $d\omega(x,y) = 0$.

Note : on peut aussi le démontrer en passant par les coordonnées polaires : si ϕ : $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors

$$\phi^*\omega = \frac{\cos\theta-\sin\theta}{r}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
\phi^*\omega =&\frac{\cos\theta-\sin\theta}{r}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \frac{\cos\theta+\sin\theta}{r}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)\\
=&\frac{1}{r}dr + d\theta,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\phi^*(d\omega) = d(\phi^*\omega) = 0.$$

b) Raisonnons par l'absurde : si ω était exacte, alors il existerait $f : U \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = df$, donc d'après le théorème de Stokes, on aurait pour toute courbe fermée C dans U, paramétrée par $\gamma : [0,1]\to\mathbb{R}^2$,

$$\int_C \omega = \int_C df = \int_{[0,1]}\gamma^* df = \int_{[0,1]} d(f\circ\gamma) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 0.$$

Prenons un cercle C_R de rayon $R\in]1,2[$, paramétré par $\gamma : [0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, \theta\mapsto (R\cos\theta, R\sin\theta)$. On a

$$\begin{aligned}
\gamma^*\omega =&\frac{(R\cos\theta - R\sin\theta)(-R\sin\theta d\theta) + (R\cos\theta+R\sin\theta)\cos\theta d\theta}{R^2}\\
=&(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta\\
=&d\theta.
\end{aligned}$$

Il vient que

$$\int_{C_R}\omega = \int_{[0,2\pi]}\gamma^*\omega = \int_{[0,2\pi]} d\theta = 2\pi.$$

On obtient une contradiction, donc ω n'est pas exacte sur U. Notons que ce n'est pas en contradiction avec le lemme de Poincaré puisque U n'est pas simplement connexe.

□

Exercice 7. Considérons le domaine $D\subseteq\mathbb{R}^2$ dont la frontière est la réunions des deux courbes C_1 et C_2 définie par :

$$C_1 = \{(x,y)\in[0,1]\times\mathbb{R} \mid y^2 = x^2 - x^3\}, \qquad C_2 = [0,1]\times\{0\}.$$

a) Rappeler la formule de Green. Comment peut-on appliquer cette formule pour exprimer l'aire d'un domaine $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ quelconque comme une intégrale curviligne le long du bord $\partial\Omega$?

b) Donner un paramétrage pour chacune des courbes C_1 et C_2.

c) Calculer l'aire de D.

Solution. a) La formule de Green nous dit que si D est un domaine lisse de $\mathbb{R}^2$ à bord lisse, et si ω est une 1-forme sur $\mathbb{R}^2$, alors

$$\iint_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

En particulier, l'aire d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par l'intégrale de la forme différentielle $dx \wedge dy$ sur Ω, de sorte que

$$A(\Omega) = \iint_\Omega dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} \eta,$$

pour n'importe quelle primitive η de $dx \wedge dy$ (par exemple, $\eta = \frac{1}{2}(xdy - ydx)$, $\eta = xdy$ ou $\eta = -ydx$ conviennent).

b) On peut utiliser les paramétrages $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ repsectivement de C_1 et C_2, définis par

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, \sqrt{t^2 - t^3}) = (t, t\sqrt{1-t}), \\ \gamma_2(t) &= (t, 0). \end{aligned}$$

c) Pour calculer l'aire de D on utilise la question a) pour $\eta = -ydx$ par exemple :

$$A(D) = -\int_{\partial D} ydx,$$

en faisant attention à ce que le bord soit orienté dans le sens trigonométrique. Cela implique de prendre un autre paramétrage de C_2, donné par $\tilde{\gamma}_2(t) = (1-t, 0)$, qui renverse l'orientation de la courbe. On obtient

$$\begin{aligned} -\int_{\partial D} ydx &= -\int_{C_1} ydx - \int_{C_2} ydx \\ &= \int_0^1 t\sqrt{1-t}dt - 0. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale restante, on effectue le changement de variable $u = 1-t$, $du = -dt$, et

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t}dt = -\int_1^0 (1-u)\sqrt{u}du = \int_0^1 \sqrt{u}du - \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}du.$$

On obtient finalement

$$A(D) = \left[\frac{2u^{3/2}}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{2u^{5/2}}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

□