Université de Strasbourg — Année 2025–2026

L3 mathématiques fondamentales — Bases de la géométrie différentielle

Contrôle continu n° 2

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

Exercice 1. Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^2$ définie par une équation polaire $\rho = \rho(\theta)$, avec ρ une fonction C^1 sur un intervalle $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Autrement dit, le paramétrage cartésien de C est donné par $(x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta))$, pour $\theta \in I$.

1. Calculer la longueur de la courbe en fonction de ρ. *(3 points)*
2. Application : montrer que la spirale d'équation polaire $\rho(\theta) = ae^{-b\theta}$ avec $a, b > 0$, définie pour $\theta \in [0, \infty[$, a une longueur finie et calculer celle-ci. *(3 point)*

Exercice 2. Soit C la courbe de paramétrage $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), -\sin(t), 2t)$, pour un certain $T > 0$.

1. Calculer le vecteur tangent unitaire $T(t)$ et la courbure $k(t)$ en tout point de la courbe. *(2 points)*
2. Montrer que l'angle entre $T(t)$ et le vecteur $\vec{u} = (0, 0, 1)$ est constant. On dit que γ est une hélice. *(2 points)*

Exercice 3. Soit C le graphe de la fonction $f : x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ sur $]0, 1[$.

1. Montrer que $\gamma : (t) = (t, f(t))$ est un paramétrage régulier de C. Peut-on étendre ce paramétrage à $[0, 1]$? *(1 point)*
2. On note L la longueur de C.
   (a) Montrer que $L \geq \int_0^1 |f'(t)|dt$. *(1 point)*
   (b) On pose $\delta = \frac{\pi}{6}$. Montrer, pour tout k assez grand et tout $t \in \left[\frac{1}{2k\pi+\delta}, \frac{1}{2k\pi-\delta}\right]$, $|f'(t)| \geq \frac{1}{2t}$. *(2 points)*
   (c) En déduire l'inégalité suivante pour un entier $K \geq 0$ assez grand *(2 points)*
   $$L \geq \frac{1}{2}\sum_{k \geq K} \ln\left(\frac{2k\pi + \delta}{2k\pi - \delta}\right).$$
   (d) (*Question bonus*) En conclure que $L = +\infty$. On pourra admettre que la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ diverge. *(2 points)*

Exercice 4. Soit $\mathbb{T}$ la surface décrite par l'équation implicite suivante (il s'agit d'un tore de révolution), pour $0 < r < R$:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2.$$

1. Montrer que $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ défini par
   $$\sigma(\theta, \phi) = ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$$
   est un paramétrage régulier de $\mathbb{T}$. *(2 points)*
2. Donner un paramétrage du plan tangent à $\mathbb{T}$ au point $(r + R, 0, 0)$. *(2 points)*