Contrôle continu n° 1

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

Exercice 1. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(u, v, w) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), w + \cos^2(v)).$$

1. Montrer que pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, F est un difféomorphisme local. *(3 points)*
2. Montrer que F n'est pas un difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^3$. *(2 points)*

Exercice 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (e^{x+y}, x - y)$.

1. Calculer sa jacobienne en tout point. *(1 point)*
2. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ et un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$ tels que $F|_U : U \to V$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. On note $F^{-1} : V \to U$ le difféomorphisme réciproque. *(1 point)*
3. Calculer $DF^{-1}(u, v)$ pour tout $(u, v) \in V$. Indication : calculer $D(F \circ F^{-1})$ de deux manières. *(3 points)*

Exercice 3. On considère l'équation $x - y + e^{x^2 \sin(y)} = 1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout (x, y) au voisinage de $(0, 0)$, l'équation ci-dessus définit localement y en fonction de x et x localement en fonction de y au voisinage de $(0, 0)$, c'est-à-dire qu'il existe :
   — un voisinage ouvert $I \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h_1 : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que pour tout $x \in I$, $x - h_1(x) + e^{x^2 \sin(h_1(x))} = 1$; *(2 points)*
   — un voisinage ouvert $J \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h_2 : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que pour tout $y \in J$, $h_2(y) - y + e^{h_2(y)^2 \sin(y)} = 1$. *(2 points)*
2. Calculer $h_1'(0)$ et $h_2'(0)$. *(2 points)*

Exercice 4. On considère le système d'équations suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$S = \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 & = & 0 \\ x + 2y^2 + z^2 & = & 3. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $I \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h : I \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (h_1(x), h_2(x))$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $(x, h_1(x), h_2(x))$ soit solution du système S pour tout $x \in I$. *(2 points)*
2. Calculer $h_1'(0)$ et $h_2'(0)$. *(2 points)*