Université de Strasbourg — Année 2025–2026

L3 mathématiques fondamentales — Bases de la géométrie différentielle

Contrôle continu n° 1

Durée : 1 heure. Documents et calculatrice interdits. Une attention particulière sera apportée à la rédaction. Le barème est indicatif et susceptible de changer.

Exercice 1. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(u, v, w) = (e^u \cos(v), e^u \sin(v), w + \cos^2(v)).$$

1. Montrer que pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, F est un difféomorphisme local. *(3 points)*
2. Montrer que F n'est pas un difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^3$. *(2 points)*

Solution.

1. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ car ses composantes $F_1 : (u, v, w) \mapsto e^u \cos(v)$, $F_2 : (u, v, w) \mapsto e^u \sin(v)$ et $F_3 : (u, v, w) \mapsto w + \cos^2(v)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ en tant que produits et sommes de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (note : il s'agit même de fonctions lisses). Sa jacobienne en $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$DF(u, v, w) = \begin{pmatrix} e^u \cos(v) & -e^u \sin(v) & 0 \\ e^u \sin(v) & e^u \cos(v) & 0 \\ 0 & -2\sin(v)\cos(v) & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Or,

$$\det(DF(u, v, w)) = (e^u)^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) = e^{2u}, \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$

et donc $\det(DF(u, v, w)) \neq 0$ pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. D'après le théorème d'inversion locale, F est bien un difféomorphisme local au voisinage de (u, v, w), et ce, pour tout (u, v, w).

2. Pour montrer que F n'est pas un difféomorphisme global sur $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle n'est pas surjective ou qu'elle n'est pas injective. On peut vérifier qu'elle est surjective (exercice bonus !), mais il est facile de montrer qu'elle n'est pas injective en utilisant la périodicité en v. En effet, pour tout $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$, $F(u, v + 2\pi, w) = F(u, v, w)$ donc F n'est clairement pas injective sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (e^{x+y}, x - y)$.

1. Calculer sa jacobienne en tout point. *(1 point)*
2. Montrer qu'il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ et un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, 0)$ tels que $F|_U : U \to V$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. On note $F^{-1} : V \to U$ le difféomorphisme réciproque. *(1 point)*
3. Calculer $DF^{-1}(u, v)$ pour tout $(u, v) \in V$. Indication : calculer $D(F \circ F^{-1})$ de deux manières. *(3 points)*

Solution.

1. F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car ses composantes $F_1 : (x,y) \mapsto e^{x+y}$ et $F_2 : (x,y) \mapsto x-y$ le sont, en tant que composées de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. D'après la question 1, on a
$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
et donc $\det(DF(0,0)) = -2 \neq 0$ donc $DF(0,0)$ est inversible. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0,0)$ et un voisinage $V \subset \mathbb{R}^2$ de $F(0,0) = (1,0)$ tels que $F|_U : U \to V$ soit un isomorphisme.
3. On utilise dans un premier temps le fait que $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_V$, qui est constante et donc qui vérifie
$$D(F \circ F^{-1})(u,v) = D(\mathrm{id}_V)(u,v) = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dans un second temps, on utilise la formule de la différentielle des fonctions composées :
$$D(F \circ F^{-1})(u,v) = DF(F^{-1}(u,v)) \circ D(F^{-1})(u,v).$$
On obtient
$$DF(F^{-1}(u,v)) \circ D(F^{-1})(u,v) = I_2,$$
et on en déduit que
$$D(F^{-1})(u,v) = (DF(F^{-1}(u,v)))^{-1}.$$
Si cela ne semble pas clair, réécrivons cela sous forme matricielle, en notant que $F^{-1}(u,v) = (F^{-1})_1(u,v), (F^{-1})_2(u,v))$:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(F^{-1}(u,v)) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(F^{-1}(u,v)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(F^{-1}(u,v)) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(F^{-1}(u,v)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial (F^{-1})_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial (F^{-1})_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial (F^{-1})_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial (F^{-1})_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
de sorte que
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial (F^{-1})_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial (F^{-1})_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial (F^{-1})_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial (F^{-1})_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(F^{-1}(u,v)) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(F^{-1}(u,v)) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(F^{-1}(u,v)) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(F^{-1}(u,v)) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} u & u \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
où l'on a noté $F^{-1}(u,v) = (x,y)$ pour simplifier les notations. Il reste à inverser la matrice de droite, et on obtient
$$D(F^{-1})(u,v) = \frac{-1}{2e^{x+y}} \begin{pmatrix} -1 & -e^{x+y} \\ -1 & e^{x+y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2u} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 1 & -u \end{pmatrix},$$
en utilisant (ou en redémontrant) la formule d'inversion d'une matrice 2×2 :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 3. On considère l'équation $x - y + e^{x^2 \sin(y)} = 1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que pour tout (x, y) au voisinage de $(0, 0)$, l'équation ci-dessus définit localement y en fonction de x et x localement en fonction de y au voisinage de $(0, 0)$, c'est-à-dire qu'il existe :
   — un voisinage ouvert $I \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h_1 : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que pour tout $x \in I$, $x - h_1(x) + e^{x^2 \sin(h_1(x))} = 1$; *(2 points)*
   — un voisinage ouvert $J \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h_2 : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que pour tout $y \in J$, $h_2(y) - y + e^{h_2(y)^2 \sin(y)} = 1$. *(2 points)*
2. Calculer $h_1'(0)$ et $h_2'(0)$. *(2 points)*

Solution.

1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = x - y + e^{x^2 \sin(y)} - 1$. C'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, et on a $F(0, 0) = 0$. Calculons $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$. On a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -1 + x^2 \cos(y) e^{x^2 \sin(y)},$$

donc $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe $I \subset \mathbb{R}$ voisinage de $x = 0$ et une fonction $h_1 : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $F(x, h_1(x)) = 0$ pour tout $x \in I$. De même,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0) = 1 \neq 0,$$

donc d'après le théorème des fonctions implicites il existe $J \subset \mathbb{R}$ voisinage de $y = 0$ et une fonction $h_2 : J \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $F(h_2(y), y) = 0$ pour tout $y \in I$. Note : on a en particulier $h_1(0) = 0$ et $h_2(0) = 0$.

2. On peut utiliser la formule du cours ou la redémontrer. On va la redémontrer ici pour plus de pédagogie : la fonction $g_1 : x \mapsto F(x, h_1(x))$ est constante sur I (car $F(x, h_1(x)) = 0$ pour tout $x \in I$) donc en particulier sa dérivée est nulle. Sa dérivée est un cas particulier de différentielle (lorsque l'espace de départ et celui d'arrivée sont de dimension 1) donc on peut appliquer la formule de la différentielle d'une fonction composée, en notant que $g(x) = F \circ G(x)$, où $G : x \mapsto (x, h_1(x))$. On obtient pour tout $x \in I$

$$Dg(x) = g_1'(x) = 0 = DF(x, h_1(x)) \circ DG(x),$$

c'est-à-dire

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_1'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + h_1'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y).$$

On en déduit la formule du cours :

$$h_1'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}.$$

De là on déduit naturellement

$$h_1'(0) = 1.$$

De même on peut montrer que

$$h_2'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)},$$

et que

$$h_2'(0) = \frac{1}{h_1'(0)} = 1.$$

Exercice 4. On considère le système d'équations suivant sur $\mathbb{R}^3$:

$$S = \left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2-z^2 & = & 0 \\ x+2y^2+z^2 & = & 3. \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert $I \subset \mathbb{R}$ de 0 et une fonction $h : I \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (h_1(x), h_2(x))$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que $(x, h_1(x), h_2(x))$ soit solution du système S pour tout $x \in I$. *(2 points)*
2. Calculer $h_1'(0)$ et $h_2'(0)$. *(2 points)*

Solution.

1. On considère la fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z))$ avec
$$F_1(x,y,z) = x^2+y^2-z^2, \quad F_2(x,y,z) = x+2y^2+z^2-3.$$
On constate que $F(0,1,1) = (0,0)$. On est donc tenté d'appliquer le théorème des fonctions implicites à $(0,0,0)$. Pour exprimer y et z en fonction de x, on a besoin que la jacobienne partielle
$$DF_x(y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$
soit inversible pour $(x,y,z) = (0,1,1)$, c'est-à-dire que son déterminant soit non nul. On a
$$DF_x(y,z) = \begin{pmatrix} 2y & -2z \\ 4y & 2z \end{pmatrix},$$
donc
$$\det(DF_x(y,z))\big|_{(x,y,z)=(0,1,1)} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$
On conclut d'après le théorème des fonctions implicites.
2. C'est un principe similaire à celui de la question 2 de l'exercice 3 : on pose $g(x) = g_1(x), g_2(x)$ avec
$$g_1(x) = F_1(x, h_1(x), h_2(x)), \quad g_2(x) = F_2(x, h_1(x), h_2(x)).$$
Les fonctions g_1 et g_2 sont constantes sur I donc de dérivées nulles. On note que $h_1(0) = h_2(0) = 1$, $\frac{\partial F_1}{\partial x}(0,1,1) = 0$ et $\frac{\partial F_2}{\partial x}(0,1,1) = 1$. Par la formule de différentielle des fonctions composées, on a
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(0,1,1) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(0,1,1) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(0,1,1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(0,1,1) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(0,1,1) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(0,1,1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h_1'(0) \\ h_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1'(0) \\ g_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2h_1'(0) - 2h_2'(0) & = & 0 \\ 4h_1'(0) + 2h_2'(0) + 1 & = & 0. \end{array} \right.$$

On peut résoudre ce système et trouver que $h_1'(0) = h_2'(0) = -\frac{1}{6}$.