
Construction et étude asymptotique de la mesure de Yang–Mills en 2D

Thibaut Lemoine

Année 2024–2025

Master 1 de mathématiques¹, École Normale Supérieure–PSL

1. Il s'agit d'une version étendue des notes d'un mini-cours dispensé au 2e semestre de M1.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Mesure de Yang–Mills en deux dimensions	6
2.1	Surfaces et cartes	6
2.2	Noyau de la chaleur sur des groupes compacts	8
2.3	Mesure de Yang–Mills discrète	10
2.4	Le groupe des lacets	15
2.5	Du discret au continu	17
3	Transformée de Fourier de la fonction de partition	19
3.1	Représentations de groupes compacts	20
3.2	Théorème de Peter–Weyl	22
3.3	Transformée de Fourier	24
3.4	Décomposition en caractères du noyau de la chaleur	25
3.5	Calcul exact de la fonction de partition	26
4	Étude asymptotique de la fonction de partition	30
4.1	Représentations de $U(N)$ et plus hauts poids	30
4.2	Fonctions zêta de Witten	32
4.3	Dualité de Schur–Weyl et couplages de partitions	34
4.3.1	Une mesure gaussienne sur $\widehat{U}(N)$	35
4.3.2	Couplage de partitions aléatoires	36
4.4	Transition de Douglas–Kazakov	39

Chapitre 1

Introduction

La théorie de Yang–Mills, nommée d’après les physiciens Chen Ning Yang et Robert Mills qui l’ont introduite dans les années 50, est une théorie de jauge non abélienne qui vise à décrire de manière unifiée les interactions fondamentales entre particules élémentaires. Il s’agit d’une théorie quantique des champs fondée sur l’action de Yang–Mills, qui est une fonctionnelle sur l’espace des connexions d’un fibré principal. Dans le cadre du modèle standard de la physique des particules, elle permet à l’heure actuelle de décrire *l’électromagnétisme*, *l’interaction nucléaire faible* et *l’interaction nucléaire forte*. Les développements mathématiques de la théorie de Yang–Mills sont nombreux, et forment un champ de recherche en expansion permanente depuis les années 70. La construction rigoureuse d’une théorie de Yang–Mills quantique sur un espace-temps à quatre dimensions fait même partie des sept *problèmes du prix du millénaire* posés par le Clay Mathematics Institute en 2000¹.

Afin de ne pas se laisser submerger par l’abondante littérature, tant physique que mathématique, on se gardera dans ce cours de développer TOUTE la théorie. Cette dernière est à l’interface de pratiquement toutes les disciplines mathématiques connues, ce qui la rend riche et élégante, mais aussi intimidante – elle l’a été longtemps pour moi. Ces notes ont donc pour vocation de démystifier une partie de la théorie de Yang–Mills en la rendant accessible à des étudiants motivés possédant un solide bagage en analyse fonctionnelle et en probabilités, ainsi qu’une appétence pour la géométrie.

Ce que le cours contient. Nous étudierons la *mesure de Yang–Mills* correspondant à la *théorie de Yang–Mills quantique euclidienne* sur une surface compacte, et ce, pour deux raisons :

- (i) La théorie discrète et la théorie continue sont équivalentes, ce qui est un atout majeur dans ce modèle, comparé au modèle en dimension supérieure qui n’est à l’heure actuelle défini que dans une version discrète (sur réseau) ;
- (ii) Contrairement à la théorie à deux dimensions dans le plan $\mathbb{R}^2$, le modèle possède

1. Le problème en question est, en fait, encore plus épineux : outre la formulation mathématique, il requiert la démonstration d’un “écart de masse” (*mass gap*) qui justifierait mathématiquement l’existence de “boules de glu”, constituées de quarks confinés par l’interaction forte – on parle de *confinement de couleur*. Cet écart de masse serait en quelque sorte un analogue du trou spectral que l’on retrouve dans l’analyse harmonique du laplacien sur des graphes ou des surfaces : un écart entre le niveau d’énergie de l’état fondamental et le premier niveau d’énergie excité.

une fonction de partition non triviale, qui est plus simple à définir et à étudier que la mesure complète, et la fonction de partition dépend presque exclusivement de la topologie de la surface, ce qui permet de traiter le problème dans sa généralité.

Les ingrédients nécessaires à la définition de cette mesure sont une surface, un graphe (presque) arbitraire plongé dans celle-ci, et un groupe de Lie compact. Nous verrons dans le chapitre 2 la construction de la mesure de Yang–Mills, puis nous en étudierons la fonction de partition dans les chapitres suivants. Pour ce faire, nous développerons dans le chapitre 3 quelques aspects de l’analyse harmonique sur les groupes de Lie compacts, qui nous permettront d’exprimer la fonction de partition de Yang–Mills sous une forme plus appropriée à une étude asymptotique. Pour finir, nous montrerons la convergence de la fonction de partition avec pour groupe de structure $U(N)$ pour toute surface compacte de genre supérieur ou égal à 1 dans le chapitre 4, en utilisant des résultats inhérents aux représentations de $U(N)$. Nous évoquerons également les résultats obtenus en genre 0.

Ce que le cours ne contient pas. Une version plus simple mais plus rigide du modèle que nous étudions, appelée théorie de jauge sur réseau (*lattice gauge theory* en anglais), correspond à un modèle exclusivement discret, sur le réseau $\mathbb{Z}^d$, qui a l’avantage d’être bien défini en dimension quelconque – en particulier en dimension 4. Sa construction diffère de celle de ce cours, et elle s’apparente aux modèles de mécanique statistique plus classiques comme le modèle d’Ising. Nous n’étudierons pas ce modèle, mais le lecteur intéressé pourra lire la synthèse [Cha19]. Nous ne développerons pas non plus les liens entre la théorie probabiliste de Yang–Mills dans le régime “grand N ” et les probabilités libres, incarnés par l’existence d’un *champ maître*, décrit pour la première fois mathématiquement par Singer [Sin95]. La raison est simple : le cas des surfaces générales n’est pas encore résolu – le lecteur intéressé par les cas déjà connus pourra se référer aux articles [Lév17 ; DN20 ; DL25] dans lesquels sont construits respectivement le champ maître sur le plan, la sphère et le tore. Enfin, nous éviterons de développer les liens, encore assez peu explorés mathématiquement, entre la théorie de Yang–Mills sur une surface compacte de genre 2 ou plus et l’intégration sur l’espace des modules de connexions plates. Il s’agit d’un rapprochement effectué heuristiquement par Witten [Wit91] et démontré rigoureusement par Sengupta [Sen03].

Références. Les principales références pour ce cours seront les suivantes ; une bibliographie plus complète est donnée à la fin du document, comprenant les références évoquées çà et là au sein de ces notes.

- Antoine DAHLQVIST et Thibaut LEMOINE. “Large N limit of Yang–Mills partition function and Wilson loops on compact surfaces”. *Probab. Math. Phys.* 4.4 (2023), p. 849-890
- Antoine DAHLQVIST et Thibaut LEMOINE. “Large N limit of the Yang–Mills measure on compact surfaces II: Makeenko–Migdal equations and the planar master field”. *Forum Math. Sigma* 13 (2025), Paper No. e17. DOI : [10.1017/fms.2024.152](https://doi.org/10.1017/fms.2024.152). URL : <https://doi.org/10.1017/fms.2024.152>
- Jacques FARAUT. *Analysis on Lie groups*. T. 110. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. An introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. x+302. ISBN : 978-0-521-71930-8

- Thibaut LEMOINE. “Large N behaviour of the two-dimensional Yang-Mills partition function”. *Combin. Probab. Comput.* 31.1 (2022), p. 144-165
- Thibaut LEMOINE et Mylène MAÏDA. “Gaussian measure on the dual of $U(N)$, random partitions, and topological expansion of the partition function”. *Ann. Proba.* (2025). to appear
- Thierry LÉVY. “Two-dimensional Markovian holonomy fields”. *Astérisque* 329 (2010), p. 172
- Thierry LÉVY et Ambar SENGUPTA. “Four chapters on low-dimensional gauge theories”. *Stochastic geometric mechanics*. T. 202. Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2017, p. 115-167
- Thierry LÉVY. “Two-dimensional quantum Yang-Mills theory and the Makeenko-Migdal equations”. *Frontiers in analysis and probability—in the spirit of the Strasbourg-Zürich meetings*. Springer, Cham, 2020, p. 275-325
- Ambar N. SENGUPTA. “Gauge theory in two dimensions: topological, geometric and probabilistic aspects”. *Stochastic analysis in mathematical physics*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, p. 109-129

Approche physique heuristique

Avant de nous lancer dans la construction de la “vraie” mesure de Yang-Mills, qui sera l’objet du prochain chapitre, nous allons motiver sa construction par sa définition usuelle, communément acceptée par les physiciens bien qu’elle soit lacunaire. Une fois n’est pas coutume, nous allons supposer connus les rudiments de géométrie différentielle, incluant la définition des variétés riemanniennes, des fibrés principaux et des connexions. Ces notions n’interviendront plus directement dans le reste du cours, mais sont utiles à la compréhension des motivations initiales.

Pour décrire la théorie de Yang-Mills, nous avons besoin d’un espace-temps, et d’un groupe de symétrie qui décrit les transformations de jauge. Pour cela, on se donne une variété riemannienne (M, g) et un groupe de Lie compact G , appelé *groupe de structure*. On suppose que l’algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d’un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariant par l’action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. On peut combiner l’espace-temps et le groupe de structure en un G -fibré principal $\pi : P \rightarrow M$. Les interactions entre particules sont représentées par un lagrangien, appelé *Lagrangien de Yang-Mills*, qui est une fonction sur l’espace $\mathcal{A}$ des connexions sur P . Ce dernier est un espace affine de direction

$$\Omega^1(M) \otimes \text{ad}(P),$$

l’espace des 1-formes sur M à valeurs dans $\text{ad}(P)$. L’*action de Yang-Mills* est une fonctionnelle $S_{\text{YM}} : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$S_{\text{YM}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_M \langle \Omega \wedge \star \Omega \rangle, \quad (1.0.1)$$

où $\star$ est l’opérateur de Hodge, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la structure sur $\text{ad}(P)$ héritée du produit scalaire invariant sur $\mathfrak{g}$, et Ω est la courbure de la connexion $\omega \in \mathcal{A}$.

La mesure de Yang–Mills sur M de groupe de structure G est la mesure définie *formellement* par

$$d\mu_{\text{YM}}(\omega) = \frac{1}{Z_{\text{YM}}} e^{\frac{i}{2T} S_{\text{YM}}(\omega)} \mathcal{D}\omega, \quad (1.0.2)$$

où $\mathcal{D}\omega$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{A}$, $T > 0$ est une *constante de couplage*, et Z_{YM} est une constante de normalisation de sorte que la mesure soit de masse totale 1. Un premier problème évident est qu’une telle mesure, à supposer qu’elle existe, n’est pas positive. Néanmoins, par prolongement analytique de l’exponentielle, on peut se ramener à une mesure de probabilité classique en effectuant une *rotation de Wick* :

$$d\mu'_{\text{YM}}(\omega) = \frac{1}{Z_{\text{YM}}} e^{-\frac{1}{2T} S_{\text{YM}}(\omega)} \mathcal{D}\omega. \quad (1.0.3)$$

Une telle mesure est appelée *mesure de Yang–Mills euclidienne*. Nous ne sommes malheureusement pas au bout de nos peines : il n’existe pas de mesure de Lebesgue sur l’espace des connexions (aïe!), et la constante de normalisation n’a aucune chance d’être finie (aïe encore!). Même si l’on tente de réduire l’espace d’intégration en jouant sur les symétries – En fait, l’action de Yang–Mills est invariante par l’action du *groupe de jauge* $\mathcal{G} = \mathcal{C}^\infty(M, G)$ – on ne s’en sort pas davantage : il n’existe pas non plus de mesure appropriée sur $\mathcal{A}/\mathcal{I}$... En se plaçant sur une compactification judicieuse, on peut définir une mesure qui semblerait satisfaire les propriétés attendues [AL94], mais rien ne garantit que la mesure de Yang–Mills soit absolument continue par rapport à cette mesure.

Une autre solution, que nous développons dans ces notes, est tout d’abord de définir la mesure de Yang–Mills sur un espace de dimension finie, ce qui est possible dans un cas discret : si l’on remplace M par une discrétisation (un graphe $\mathbb{G}$) et le fibré $\pi : P \rightarrow M$ par un fibré trivial discret $\pi' : \mathbb{G} \times G \rightarrow \mathbb{G}$, on peut donner un sens à (1.0.3). L’action de Yang–Mills ressemble fort à une norme L^2 , et donc la densité de la mesure de Yang–Mills euclidienne par rapport à l’hypothétique $\mathcal{D}\omega$ fait penser à une sorte de mesure gaussienne. Cette construction a un sens en toutes dimensions, mais nous ne nous intéresserons qu’au cas à deux dimensions, pour les raisons citées au début de l’introduction.

Chapitre 2

Mesure de Yang–Mills en deux dimensions

2.1 Surfaces et cartes

Dans ce cours, une *surface* désignera toujours une variété différentielle réelle lisse de dimension 2.

Définition 2.1.1. Un *graphe* est un triplet $\mathbb{G} = (V, E, I)$ constitué de deux ensembles V et E et d'une relation d'incidence $I \subset V \times E$, de sorte que le cardinal de $\{v \in V : (v, e) \in I\}$ soit 1 ou 2 pour tout $e \in E$. Les éléments de V (resp. E) sont appelés *sommets* (resp. *arêtes*).

La relation d'incidence encode de manière abstraite l'idée intuitive selon laquelle les sommets sont au *bord*¹ des arêtes. Si $\mathbb{G} = (V, E, I)$ est un graphe,

- (i) deux arêtes $e_1, e_2 \in E$ sont *adjacentes* si elles sont incidentes à un même sommet $v \in V$. Elles forment une *double arête* si elles sont incidentes aux deux mêmes sommets $v \in V$;
- (ii) Une arête $e \in E$ est une *boucle* si elle est incidente à un seul sommet.

Si $\mathbb{G}$ contient des arêtes doubles ou des boucles, on dit qu'il s'agit d'un *multigraphe*². Sinon, il s'agit d'un *graphe simple*.

Définition 2.1.2. Une *carte topologique* est un multigraphe $\mathbb{G} = (V, E, I)$ muni d'un plongement $\theta : \mathbb{G} \rightarrow \Sigma$, où Σ est une surface, tels que :

- Les images de deux sommets distincts $v_1, v_2 \in V$ par θ soient des points distincts de Σ ,

1. Le choix de ce mot n'est pas laissé au hasard, dans le sens où en topologie algébrique, le bord d'une 1-cellule est bien constitué de 0-cellules.

2. Attention, il existe pléthore de conventions en théorie des graphes : pour certains auteurs, un multigraphe n'est pas un graphe et un graphe désigne ce que nous appelons ici un graphe simple ; pour d'autres, un multigraphe peut contenir des arêtes multiples mais pas des boucles. Il convient souvent, lorsqu'on se penche sur un livre ou un article qui traite du sujet, de vérifier dans quel contexte l'auteur se place.

- Les images des arêtes $e \in E$ sont des courbes continues $\theta_e : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ qui ne se rencontrent qu'à leurs extrémités $\underline{e} = \theta_e(0)$ et $\bar{e} = \theta_e(1)$,
- Le complémentaire dans Σ du *squelette* $\text{Sk}(\mathbb{G}) = \bigcup_{e \in E} \theta_e$ de $\mathbb{G}$ se divise en une ou plusieurs composantes connexes $f_1, \dots, f_k$, chacune simplement connexe, appelées *faces*.

On note $F = \{f_1, \dots, f_k\}$ l'ensemble des faces de la carte.

Un exemple de carte est donné dans la Figure 2.1.

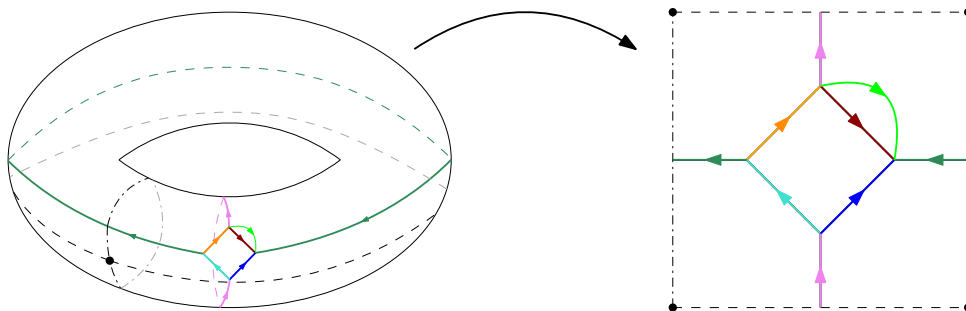


FIGURE 2.1 – Une carte orientée de genre 1, plongée dans un tore.

Une carte topologique est un exemple de CW-complexe, ou complexe cellulaire, en topologie algébrique. Plus précisément il s'agit d'un CW-complexe de dimension 2 : ses sommets (resp. arêtes, faces) constituent des 0-cellules (resp. 1-cellules, 2-cellules), et le squelette de la carte tel que décrit dans la définition 2.1.2 est exactement le squelette du complexe correspondant. Par ailleurs, la carte est munie naturellement d'une orientation, induite sur les arêtes par l'orientation des courbes correspondantes, et sur les faces par l'orientation de la surface sous-jacente (pourvu que celle-ci soit orientable, bien entendu).

Exemples. Parmi les exemples de cartes les plus étudiés, notons les triangulations (resp. quadrangulations) : il s'agit de cartes dont les bords de toutes les faces sont des triangles (resp. quadrilatères). L'étude de triangulations/quadrangulations aléatoires est encore un champ très actif, cf. par exemple [GM21] ou [BL21].

On peut munir les cartes topologiques d'une relation d'équivalence qui permet de s'affranchir du choix du plongement. Les classes d'équivalences, appelées *cartes combinatoires*, sont des objets dont l'étude s'est développée de manière considérable depuis une trentaine d'années³, et se retrouvent à l'interface de la physique théorique (notamment la gravité quantique), la combinatoire et les probabilités. Les livres de Lando–Zvonkin [LZ04] et de Eynard [Eyn16] offrent un aperçu des multiples développements de cette théorie. Parmi les directions prises dans l'étude des cartes, citons notamment la *réurrence topologique* et l'*étude de grandes cartes aléatoires*.

Une application étonnante de l'étude des cartes est la classification des surfaces, dont on trouvera par exemple une preuve dans le cours [Lab13] de Labourie, ou dans le livre [Sti93] de Stillwell.

3. Les physiciens s'intéressaient en réalité à de tels objets depuis les années 70, notamment suite à l'article [t H74] de 't Hooft, mais l'engouement en mathématiques a été probablement lancé par l'article de Kontsevich [Kon92] qui démontrait une conjecture due à Witten, et qui lui a valu (en grande partie) la médaille Fields.

Théorème 2.1.1 (Théorème de classification). *Soit Σ une surface compacte connexe sans bord.*

— *Si Σ est orientable, alors elle est nécessairement homéomorphe à l'une de ces surfaces :*

- (i) *Une sphère,*
- (ii) *La somme connexe de g tores, pour $g \geq 1$.*

Dans ce cas, on dit qu'elle est de genre g , avec pour convention $g = 0$ si elle est homéomorphe à une sphère.

— *Si Σ n'est pas orientable, alors elle est homéomorphe à la somme connexe de k plans projectifs réels, pour $k \geq 1$.*

Dans tout le cours, nous nous intéresserons exclusivement à des surfaces compactes connexes orientables et sans bord, par souci de simplicité ; une construction plus générale pourra être trouvée dans [Lév10]. Ainsi, désormais, nous emploierons le terme *surface de genre g* sans ambiguïté pour une surface compacte connexe orientable et sans bord de genre g selon le théorème de classification. Nous allons en particulier étudier des espaces de *chemins*, ou de *lacets*, dans des cartes.

Définition 2.1.3. Soit $\mathbb{G} = (V, E, F)$ une carte topologique. Un *chemin* γ dans $\mathbb{G}$ est soit un sommet $v \in V$ (on parle de *chemin constant*), soit une concaténation d'arêtes $e_1 \cdots e_n$, où $\overline{e_i} = e_{i+1}$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Dans le second cas, on note $\underline{\gamma} = \underline{e_1}$ et $\overline{\gamma} = \overline{e_n}$. Le chemin est un *lacet* si $\underline{\gamma} = \overline{\gamma}$.

Les chemins constants dans une carte sont également considérés comme des lacets, dans le sens où leur sommet de départ est également leur sommet d'arrivée. Pour tout lacet ℓ dans $\mathbb{G}$, on appelle *point de base* le sommet en question. On note $P(\mathbb{G})$ (resp. $P_v(\mathbb{G})$, $L(\mathbb{G})$, $L_v(\mathbb{G})$) l'ensemble des chemins (resp. chemins de base $v \in V$, lacets, lacets de base $v \in V$) dans $\mathbb{G}$.

2.2 Noyau de la chaleur sur des groupes compacts

Définition 2.2.1. Un *groupe de Lie* est un groupe G muni d'une structure de variété différentielle, de sorte que la multiplication et l'inversion soient des applications lisses.

Comme promis, nous éviterons au maximum les considérations de géométrie différentielle, en nous restreignant à des groupes de matrices, c'est-à-dire des sous-groupes de $GL(N, \mathbb{C})$ pour $N \geq 1$ fixé. Cela peut sembler restrictif, mais la théorie de jauge considère systématiquement des groupes compacts⁴, et il s'avère que tout groupe de Lie compact est un groupe matriciel (c'est une conséquence du théorème de Peter–Weyl que nous verrons au chapitre 3).

Nous avons besoin de deux objets du calcul différentiel et intégral sur G , le laplacien et la mesure de Haar. Pour être plus précis, la mesure de Haar ne nécessite qu'une structure de groupe topologique, et le laplacien une structure de variété riemannienne. Commençons par la mesure de Haar.

4. Un analogue de la théorie de jauge, pour des groupes non compacts, serait par exemple

Définition 2.2.2. Soit G un groupe topologique localement compact. Une mesure de Radon positive μ sur G est *invariante à gauche* si elle vérifie pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$

$$\int_G f(gx) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad \forall g \in G.$$

Elle est *invariante à droite* si elle vérifie pour tout $f \in \mathcal{C}_c(G)$

$$\int_G f(xg) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x), \quad \forall g \in G.$$

Une mesure strictement positive invariante à gauche (resp. à droite) sur G est appelée *mesure de Haar à gauche* (resp. à droite).

Le théorème suivant, admis, est dû à von Neumann et à Kakutani.

Théorème 2.2.1. *Soit G un groupe topologique compact. Il existe une unique mesure de Haar, à la fois à gauche et à droite, que l'on note dg .*

Sur un groupe topologique compact, on peut définir la notion de produit de convolution par analogie au cas de $\mathbb{R}^n$: si $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions boréliennes, leur produit de convolution est défini par

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

Définition 2.2.3. Soit $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ un groupe matriciel compact, dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est munie d'un produit scalaire G -invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\{X_1, \dots, X_d\}$ une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ pour ce produit scalaire. L'opérateur de *Laplace–Beltrami* sur G est l'opérateur différentiel $\Delta_G : \mathcal{C}^2(G) \rightarrow \mathbb{C}$ défini par

$$\Delta_G f(g) = \sum_{i=1}^d \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(g e^{tX_i}). \quad (2.2.1)$$

Le *noyau de la chaleur* sur G est le semigroupe de convolution $(p_t)_{t \geq 0}$ solution de

$$\frac{d}{dt} p_t(g) = \frac{1}{2} \Delta_G f(g), \quad \forall g \in G, \quad (2.2.2)$$

avec pour condition initiale $\lim_{t \rightarrow 0^+} p_t = \delta_1$, où la limite est à prendre au sens des distributions.

En un certain sens, le noyau de la chaleur est la loi d'un mouvement brownien sur G issu de l'élément neutre. Une approche probabiliste du noyau de la chaleur consiste même à se reposer sur cette approche ; des techniques de calcul stochastique matriciel ont notamment permis une étude quantitative du noyau de la chaleur, comme par exemple [LM10]. Dans un esprit plus géométrique encore, une partie des travaux de Bismut ont consisté à démontrer des résultats pointus sur les propriétés du laplacien sur des variétés à l'aide du mouvement brownien, cf. [Bis15]. Nous ne nous attarderons pas sur ces approches probabilistes, bien qu'elles soient tout à fait dignes d'intérêt.

Dans ce cours, nous allons nous restreindre au groupe

$$G = \mathrm{U}(N) = \{U \in \mathrm{GL}(N, \mathbb{C}) : U^* = U^{-1}\},$$

dont l'algèbre de Lie est l'espace des matrices antihermitiennes :

$$\mathfrak{u}(N) = \{X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) : X^* = -X\} = i\mathcal{H}_N,$$

où $\mathcal{H}_N = \{X \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}) : X^* = X\}$ est l'espace des matrices hermitiennes, sur lequel est notamment défini l'ensemble gaussien unitaire, ou GUE. Nous munissons $\mathfrak{u}(N)$ du produit scalaire suivant :

$$\langle X, Y \rangle = N \mathrm{Tr}(XY^*) = -N \mathrm{Tr}(XY).$$

Dans le chapitre 3 nous utiliserons la théorie des représentations dans le but d'obtenir une décomposition spectrale du noyau de la chaleur sur $G = \mathrm{U}(N)$ associé à ce produit scalaire.

2.3 Mesure de Yang–Mills discrète

Comme vu dans l'introduction, la mesure de Yang–Mills est formellement une mesure sur l'espace des connexions sur la variété sous-jacente. Dans le cas discret, c'est-à-dire lorsqu'on considère une carte topologique, cet espace devient nettement plus simple à décrire.

Définition 2.3.1. Soit $\mathbb{G} = (V, E, I)$ un graphe, et G un groupe matriciel compact.

- (i) Le G -fibré *principal trivial* au-dessus de $\mathbb{G}$ est $P = G^V$.
- (ii) Une *section* de P est simplement un élément de P , c'est-à-dire une fonction $\sigma : V \rightarrow G$.
- (iii) Une *connexion* sur P est une fonction $\omega : E \rightarrow G$

$$\omega : \begin{cases} E & \longrightarrow & G \\ e & \longmapsto & \omega(e), \end{cases}$$

qui vérifie

$$\omega(e^{-1}) = \omega(e)^{-1}, \quad \forall e \in E.$$

- (iv) Étant donné un chemin $\gamma = e_1 \cdots e_n$ obtenu par concaténation d'arêtes adjacentes de E , l'*holonomie* de la connexion ω le long de γ est donnée par

$$\mathrm{hol}(\omega, \gamma) := h_\gamma = \omega(e_1) \cdots \omega(e_n).$$

- (v) Si de plus $\mathbb{G}$ est une carte, munie de son ensemble de faces F , la *courbure* de la connexion ω est la fonction

$$\Omega^\omega : \begin{cases} F & \longrightarrow & G \\ f & \longrightarrow & \mathrm{hol}(\omega, \partial f), \end{cases}$$

où ∂f est le bord de la face f , orienté positivement. On dit que ω est *plate* si $\Omega^\omega(f) = 1_G$ pour tout $f \in F$.

Dans la définition précédente, on a en réalité identifié les connexions avec leur holonomie le long des arêtes, parce que la définition usuelle d’une connexion est en tant qu’opérateur différentiel sur les sections, et que cette notion n’est pas claire dans le cas d’un espace discret. En revanche, il est toujours possible de caractériser de manière univoque une connexion par son holonomie le long des chemins.

La courbure d’une connexion dépend d’un choix d’un point de base pour le bord de chaque face, mais nous verrons plus tard qu’on considère en réalité, comme espace de configuration, un quotient de l’espace des connexions modulo les transformations de jauge, et la définition de la courbure ne dépend que des classes d’équivalence pour l’action du groupe de jauge ; il s’agit donc d’un objet bien défini dans notre contexte. Notons par ailleurs que la courbure, à l’instar de son analogue dans le cas continu, est une 2-forme à valeurs dans G : de manière générale, sur un CW-complexe, les 0-formes (resp. 1-formes, 2-formes) sont des fonctions sur les 0-cellules (resp. 1-cellules, 2-cellules), c’est-à-dire sur les sommets (resp. arêtes, faces) qui vérifient certaines propriétés supplémentaires dont nous nous passerons dans ce cours.

Exemples.

- Si $\mathbb{G} = \mathbb{Z}^d$ et $G = \mathbb{Z}_2$, un G -fibré principal trivial muni d’une connexion définit le *modèle de jauge d’Ising sur réseau* [Cha20] : les sections du fibré définissent une configuration de spin, et la connexion définit une interaction entre les spins voisins, avec comme condition que la connexion soit plate. Une généralisation pour $G = \mathbb{Z}_n$ est actuellement un sujet actif de recherche [FLV23].
- Si l’on prend $G = \mathrm{U}(1)$, on tombe sur l’espace de configuration étudié par Kenyon dans le cadre des forêts couvrantes à cycle enraciné (*cycle-rooted spanning forests*, ou CRSF) [Ken11].

L’espace des connexions est clairement en bijection avec $G^{|E|}$, qui est un groupe de Lie compact. La *mesure uniforme* sur les connexions est la mesure de Haar unitaire sur $G^{|E|}$.

Définition 2.3.2. Soit $\mathbb{G} = (V, E, I)$ un graphe muni d’une G -connexion h . Une *transformation de jauge* est une fonction $j : V \rightarrow G$. Le groupe des transformations de jauge G^V agit sur l’espace des connexions via

$$(j \cdot \omega)(e) = j(\bar{e})^{-1} \omega(e) j(\underline{e}). \quad (2.3.1)$$

Intuitivement, la mesure de Yang–Mills discrète va être définie comme une mesure sur G^E invariante par cette action. On peut munir $\Omega^1(\mathbb{G}, G) = G^E$ de deux tribus différentes :

- La *tribu cylindrique* $\mathcal{C}$ qui est la plus petite tribu qui rende mesurable l’application $h \mapsto h_\ell$ pour tout lacet ℓ dans $\mathbb{G}$;
- La *tribu invariante* $\mathcal{I}$ qui est la plus petite tribu qui rende $f(h_{\ell_1}, \dots, h_{\ell_n})$ mesurable, pour tout $n \geq 1$, toute fonction $f : G^n \rightarrow \mathbb{R}$ invariante par l’action diagonale de G , et toute famille $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ de lacets sur $\mathbb{G}$ de même point de base.

Proposition 2.3.1. La mesure de Haar sur $(G^E, \mathcal{I})$ est invariante par l’action de G^V , donc descend en une mesure sur $\mathcal{C}_G^G = G^E / G^V$, appelée mesure uniforme.

Démonstration. C’est une conséquence immédiate de l’invariance de la mesure de Haar sur G par translation. $\square$

Remarque 2.3.1. Si l'on ne suppose pas G compact, l'espace de configuration est bien défini mais il n'existe plus de mesure de probabilité uniforme ! Il existe bien des mesures de Haar, mais toutes de volume infini. Inversement, il est possible de considérer des mesures de probabilité, mais pas uniformes.

Nous sommes désormais en capacité de définir la mesure de Yang–Mills discrète tant attendue.

Définition 2.3.3. Soit $\mathbb{G} = (V, E, F)$ une carte topologique plongée dans une surface de genre $g \geq 0$, munie d'une mesure d'aire vol et d'aire totale $T > 0$, et G un groupe matriciel compact. La *mesure de Yang–Mills* sur $\mathbb{G}$ de groupe de jauge/structure G est la mesure $\mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}$ sur G^E définie par

$$\mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \frac{1}{Z_G(g, T)} \prod_{f \in F} p_{\text{vol}(f)}(\Omega^\omega(f)) d\omega, \quad (2.3.2)$$

où

$$Z_{\mathbb{G}, G}(g, T) = \int_{G^E} \prod_{f \in F} p_{\text{vol}(f)}(\Omega^\omega(f)) d\omega \quad (2.3.3)$$

est la *fonction de partition* associée.

L'équation (2.3.2) s'appelle la *formule de Driver–Sengupta*, du nom des deux premiers mathématiciens à l'avoir écrite (Driver pour $\mathbb{R}^2$, et Sengupta pour toute surface compacte). Comme le noyau de la chaleur sur G est invariant par conjugaison, la mesure ne dépend pas du paramétrage du bord des faces dans la définition de la courbure, et la mesure descend en une mesure sur G^E/G^V .

Exemple. Disons que l'on se donne la carte illustrée en Figure 2.2 dans un tore : Il s'agit

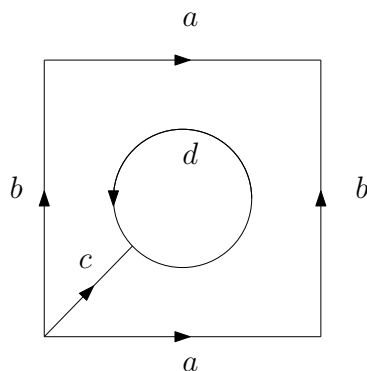


FIGURE 2.2 – Une carte de genre 1. Les arêtes de même nom sont identifiées par recollement.

de $\mathbb{G} = (V, E, F)$, où $V = \{v_1, v_2\}$, $E = (a, b, c, d)$ et $F = \{f_1, f_2\}$ où f_1 a pour bord orienté positivement $\partial f_1 = d$ et f_2 a pour bord $\partial f_2 = d^{-1}c^{-1}aba^{-1}b^{-1}c$. On note t_1 l'aire de f_1 et t_2 l'aire de f_2 , ainsi que $t = f_1 + f_2$ l'aire totale du tore dans lequel le graphe est plongé. On a d'après la formule de Driver–Sengupta

$$\mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \frac{1}{Z_G(1, t)} p_{t_1}(\omega(d)) p_{t_2}(\text{hol}(\omega, d^{-1}c^{-1}aba^{-1}b^{-1}c)) d\omega.$$

En utilisant la bijection $G^E \simeq G^{|E|} = G^4$, et en notant respectivement x_1, x_2, x_3, x_4 les variables d'intégration associées à a, b, c, d , on peut la réécrire

$$\mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \frac{1}{Z_G(1, t)} p_{t_1}(x_4) p_{t_2}(x_4^{-1} x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

En particulier,

$$Z_G(1, t) = \int_{G^4} p_{t_1}(x_4) p_{t_2}(x_4^{-1} x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

En utilisant la propriété de semi-groupe du noyau de la chaleur il vient

$$Z_G(1, t) = \int_{G^3} p_t(x_3^{-1} x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3) dx_1 dx_2 dx_3,$$

Et comme $p_t(gxg^{-1}) = p_t(x)$ pour tout $x, g \in G$, on obtient finalement

$$Z_G(1, t) = \int_{G^2} p_t([x_1, x_2]) dx_1 dx_2,$$

où l'on a posé $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ le commutateur d'éléments de G .

Remarque 2.3.2. Dans la littérature, cette définition de la mesure de Yang–Mills est parfois décrite comme une théorie de jauge discrète pour l'*action du noyau de la chaleur*, ou *action de Villain*. Une autre définition, très étudiée actuellement, est l'*action de Wilson* introduite par Wilson [Wil74], définie par

$$S(\omega) = \sum_{f \in F} \text{Re}(\text{Tr}(1 - \Omega^\omega(f))), \quad (2.3.4)$$

et la mesure associée, de constante de couplage $\beta > 0$, est alors la mesure de Gibbs de température inverse β et de hamiltonien S , c'est-à-dire

$$\mu(d\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\beta S(\omega)} d\omega. \quad (2.3.5)$$

L'avantage de l'action de Wilson est qu'elle définit un modèle de mécanique statistique plus simple à étudier, y compris en dimension supérieure à deux, mais le passage d'une théorie discrète à une théorie continue nécessite de la renormalisation et demeure essentiellement un problème ouvert. En dimension deux, des recherches récentes établissent néanmoins des correspondances entre la théorie avec action de Villain et celle de Wilson [CG25 ; SSZ25]. Dans ces notes de cours, lorsqu'on parlera de la mesure de Yang–Mills, il s'agira toujours implicitement de celle utilisant l'action du noyau de la chaleur.

Remarque 2.3.3. La mesure de Yang–Mills peut également être définie pour une surface à bord Σ . Cela revient à voir Σ comme une surface Σ_0 sans bord, munie de lacets simples marqués dont la réunion donne $\partial\Sigma$, et le graphe plongé dans Σ est un graphe $\mathbb{G}$ plongé dans Σ_0 tel que $\partial\Sigma$ est une concaténation d'arêtes de $\mathbb{G}$, et dont les faces ne faisant pas partie de Σ sont des faces marquées qui n'interviennent pas dans la définition de la mesure. On impose ensuite éventuellement des conditions au bord, cf. [Lév10 ; DL23]. En particulier, on peut définir la mesure sur $\mathbb{R}^2$ comme une mesure sur un graphe plongé dans la sphère, muni d'une face marquée appelée *face infinie*.

Nous allons décrire une propriété fondamentale de la mesure de Yang–Mills : son invariance par subdivision. Elle implique notamment que la fonction de partition ne dépend que de la topologie et de l'aire de la surface, pas du choix du graphe.

Théorème 2.3.2. *Soit $\mathbb{G} = (V, E, F)$ une carte topologique plongée dans une surface Σ de genre $g \geq 0$, et $\mathbb{G}' = (V, E', F')$ une carte topologique obtenue en retirant une arête de $\mathbb{G}$, munie du même plongement. Si l'on note $\mathcal{R}$ l'application de restriction de $G^{E'}$ vers G^E induite par celle de $\mathbb{G}$ vers $\mathbb{G}'$, alors*

$$(\mathcal{R})_* \mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}} = \mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}. \quad (2.3.6)$$

En particulier, la fonction de partition $Z_{\mathbb{G}, G}(g, T)$ ne dépend pas de $\mathbb{G}$, et vérifie :

— Si $g \geq 1$,

$$Z_{\mathbb{G}, G}(g, T) = Z_G(g, T) = \int_{G^{2g}} p_T([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]) dx_1 dy_1 \cdots dx_g dy_g. \quad (2.3.7)$$

— Si $g = 0$,

$$Z_{\mathbb{G}, G}(0, T) = Z_G(0, T) = p_T(1). \quad (2.3.8)$$

Démonstration. La démonstration du théorème va se dérouler en 2 étapes : on montre d'abord le théorème pour les mesures non normalisées $\tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}$, puis on montre que la fonction de partition ne dépend pas du graphe ; ces deux assertions impliquent alors le théorème pour les mesures normalisées.

Étape 1. Soit $e_0 \in E$ l'arête que l'on retire pour passer de $\mathbb{G}$ à $\mathbb{G}'$. Alors $E' = E \cup \{e\}$. Pour que $\mathbb{G}$ soit toujours une carte, cela signifie que e sépare deux faces f_1 et f_2 de $\mathbb{G}$, qui deviennent, après effacement de e , une seule face $f_* \in F'$. On pose $F_0 = F \setminus \{f_1, f_2\}$ et $F'_0 = F' \setminus \{f_*\}$, et on constate que $F' = F'_0$. Soit $\Phi : G^{E'} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. Elle correspond à une fonction sur $G^{E'} \sim G^{|E'|}$ invariante par l'action de $G^{V'}$, que l'on notera aussi Φ . D'après la formule de Driver–Sengupta,

$$\int_{G^{E'}} \Phi(\omega) \mathcal{R}_* \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \prod_{f \in F'} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}) d\omega.$$

On énumère arbitrairement les arêtes de E' par $(e_1, \dots, e_k)$, où $k = |E|$, de sorte que $E = \{e_1, \dots, e_k, e\}$.

$$\begin{aligned} \int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \prod_{f \in F'} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}) d\omega &= \int_{G^{k+1}} \Phi(e_1, \dots, e_k) \prod_{f \in F'} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}) de_1 \dots de_n de \\ &= \int_{G^k} \Phi(e_1, \dots, e_k) \prod_{f \in F'} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}) de_1 \dots de_n, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité s'obtient en intégrant par rapport à e . En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on a

$$\int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \int_{G^{k+1}} \Phi(e_1, \dots, e_k) \prod_{f \in F} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}) de_1 \dots de_k de.$$

On pose

$$P(e_1, \dots, e_k) = \Phi(e_1, \dots, e_k) \prod_{f \in F_0} p_{\text{vol}(f)}(h_{\partial f}),$$

ainsi que $t_1 = \text{vol}(f_1)$ et $t_2 = \text{vol}(f_2)$. On a d'un côté

$$\int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \int_{G^{k+1}} P(e_1, \dots, e_k) p_{t_2}(h_{\partial f_1}) p_{t_1}(h_{\partial f_2}) de_1 \dots de_k de, \quad (2.3.9)$$

et de l'autre

$$\int_{G^{E'}} \Phi(\omega) \mathcal{R}_* \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) = \int_{G^k} P(e_1, \dots, e_k) p_{t_1+t_2}(h_{\partial f_*}) de_1 \dots de_k. \quad (2.3.10)$$

On peut trouver des mots α, β en les arêtes de $\mathbb{G}'$ tels que $\partial f_1 = e\alpha$, $\partial f_2 = \beta e^{-1}$ et $\partial f_* = \beta\alpha$. On en déduit que $\partial f_* = \partial f_2 \partial f_1$. On intègre le terme de droite de (2.3.9) par rapport à e et on utilise la propriété de semi-groupe du noyau de la chaleur :

$$\begin{aligned} \int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) &= \int_{G^k} P(e_1, \dots, e_k) p_{t_1+t_2}(\partial f_2 \partial f_1) p_{t_1}(e\alpha) de_1 \dots de_k. \\ \int_{G^E} \Phi \circ \mathcal{R}(\omega) \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) &= \int_{G^k} P(e_1, \dots, e_k) p_{t_1+t_2}(\partial f_2 \partial f_1) p_{t_1}(e\alpha) de_1 \dots de_k \\ &= \int_{G^{E'}} \Phi(\omega) \mathcal{R}_* \tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega), \end{aligned}$$

ce qui montre l'invariance des mesures non normalisées comme prévu.

Étape 2. La fonction de partition $Z_{\mathbb{G}, G}(g, T)$ est l'intégrale de la mesure non normalisée $\tilde{\mu}_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}$, qui est invariante par subdivision comme montré précédemment, donc ne dépend pas du graphe. Si $g \geq 1$, on obtient (2.3.7) en appliquant la formule de Driver–Sengupta à une carte possédant une seule face et de bord $[a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$; si $g = 0$ on applique la formule de Driver–Sengupta à une carte possédant deux faces séparées par un lacet simple. $\square$

2.4 Le groupe des lacets

Les principales observables de la théorie de Yang–Mills sont les *boucles de Wilson* $W_\ell^\chi = \chi(h_\ell)$, où ℓ est un chemin tracé dans $\mathbb{G}$ et $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction centrale sur G , c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\chi(k^{-1}gk) = \chi(g), \quad \forall g, k \in G.$$

En pratique, nous allons nous restreindre aux boucles de Wilson

$$W_\ell = \text{tr}(h_\ell),$$

car elles forment une famille dense et génératrice dans l'algèbre des boucles de Wilson, d'après un théorème de Lévy [Lév04]. L'objectif premier est de calculer l'espérance de boucles de Wilson pour la mesure de Yang–Mills. Une première remarque est que celle-ci est nulle pour tout chemin γ qui n'est pas un lacet.

Proposition 2.4.1. *Soit γ un chemin dans $\mathbb{G}$ tel que $\bar{\gamma} \neq \underline{\gamma}$. Alors $\mathbb{E}[W_\gamma] = 0$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'invariance de jauge. $\square$

D'après le résultat ci-dessus, il suffit de se concentrer sur les boucles de Wilson associées à des lacets. Nous allons voir quelles structures se cachent derrière l'espace des lacets que l'on peut tracer dans $\mathbb{G}$. La première remarque que l'on peut faire, est que l'on peut munir $L(\mathbb{G})$ d'une opération de multiplication, donnée par la concaténation des mots non vides : si $\gamma_1 = e_1 \cdots e_m$ et $\gamma_2 = e'_1 \cdots e'_n$, et si $\bar{e}_m = \underline{e'_1}$, alors $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \gamma_1 \gamma_2 = e_1 \cdots e_m e'_1 \cdots e'_n$. On étend également la concaténation aux mots constants : $\gamma \cdot \bar{\gamma} = \underline{\gamma} \cdot \gamma = \gamma$ par convention. On définit par ailleurs, pour tout $\gamma = e_1 \cdots e_n \in P(\mathbb{G})$, le chemin inverse $\gamma^{-1} = e_n^{-1} \cdots e_1^{-1}$. On est cependant loin d'avoir une structure algébrique riche : $L(\mathbb{G})$ n'est pas stable par la multiplication, et il n'y a pas d'élément neutre pour l'inversion. Pour résoudre le premier problème, deux possibilités s'offrent à nous : fixer un point de base pour les lacets, ou bien introduire une relation d'équivalence qui identifie tous les lacets obtenus par permutation circulaire d'un même mot en des arêtes adjacentes. Nous nous contenterons ici de la première solution dans un souci de simplicité. On note $L_v(\mathbb{G})$ l'ensemble des lacets de base $v \in V$ dans $\mathbb{G}$.

Pour résoudre le second problème, il nous faut trouver un moyen, pour tout lacet $\ell \in L_v(\mathbb{G})$, d'identifier $\ell\ell^{-1}$ au chemin constant. Si $\ell = e_1 \cdots e_n$, on voit que $\ell\ell^{-1} = e_1 \cdots e_n e_n^{-1} \cdots e_1^{-1}$, et intuitivement on voudrait effacer $e_n e_n^{-1}$, puis $e_{n-1} e_{n-1}^{-1}$, et ainsi de suite. Formalisons cela : si $e \in E$ est une arête et γ_1, γ_2 sont deux chemins dans $\mathbb{G}$ tels que $\bar{\gamma}_1 = \underline{e} = \underline{\gamma}_2$, et si l'on pose $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ et $\gamma' = \gamma_1 e e^{-1} \gamma_2$, alors on dit que γ' est obtenu par insertion de e dans γ , ou réciproquement, que γ est obtenu par effacement de e dans γ' .

Définition 2.4.1. Deux lacets $\ell_1, \ell_2 \in L(\mathbb{G})$ sont dans la même *classe de réduction* si on peut obtenir l'un à partir de l'autre à l'aide d'un nombre fini d'insertions et d'effacements d'arêtes. On note $\sim_r$ la relation d'équivalence qui en découle, et $RL(\mathbb{G}) = L(\mathbb{G}) / \sim_r$ l'ensemble des *lacets réduits*.

Proposition 2.4.2. *Pour tout $v \in V$, l'ensemble $RL_v(\mathbb{G}) = L_v(\mathbb{G}) / \sim_r$ est un groupe.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Lemme 2.4.3. *Pour toute carte $\mathbb{G} = (V, E, F)$ plongée dans une surface de genre g , et pour tout $v \in V$, le groupe $RL_v(\mathbb{G})$ est libre de rang $|V| - |E| + |F| = 2 - 2g$.*

Démonstration. Cf. [Lév10], Lemma 1.3.33. $\square$

Proposition 2.4.4. *Soit $\mathbb{G} = (V, E, F)$ une carte plongée dans une surface Σ de genre g et $v \in V$ un sommet fixé. On pose $r = |F|$. Alors :*

(i) *Le groupe $RL_v(\mathbb{G})$ admet pour présentation*

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c_1, \dots, c_k \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = c_1 \cdots c_k \rangle,$$

où les classes d'homotopie de $(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)$ engendrent le groupe fondamental de Σ , et $c_1, \dots, c_k$ sont des lassos⁵ entourant les faces de F .

5. Un lasso de base v qui entoure une face f est un lacet de la forme $\gamma \partial f \gamma^{-1}$, où γ est un chemin tel que $\underline{\gamma} = v$ et $\bar{\gamma} \in \partial f$.

(ii) Pour toute fonction mesurable bornée $f : G^{2g+k} \rightarrow \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} Z_G(g, T) \int_{G^{2g+k}} f(H_{a_1}, H_{b_1}, \dots, H_{a_g}, H_{b_g}, H_{c_1}, \dots, H_{c_k}) \mu_{\mathbb{G}, G, \Sigma, \text{vol}}(d\omega) \\ = \int_{G^{2g+k-1}} f(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g, z_1, \dots, z_k) \prod_{i=1}^k p_{\text{vol}(f_i)}(z_i) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i \prod_{j=1}^{k-1} dz_j, \end{aligned}$$

en posant $z_k = z_{k-1}^{-1} \dots z_1^{-1} [x_1, y_1] \dots [x_g, y_g]$.

Démonstration. Cf. [Lév10], Prop. 2.4.2. □

2.5 Du discret au continu

La propriété d’invariance par subdivision dont jouit la mesure de Yang–Mills discrète permet de la définir de manière directe pour des graphes de plus en plus fins, et l’on s’attend à pouvoir l’étendre en une mesure “continue” par passage à la limite. L’argument sous-jacent est un analogue du théorème d’extension de Kolmogorov en probabilités, qui permet de définir le mouvement brownien comme un processus à trajectoires continues à partir de ses marginales fini-dimensionnelles, qui sont des familles discrètes. La morale est que l’on ne **perd pas** de généralité à se placer dans le cas de la mesure de Yang–Mills discrète, en tout cas pas si l’on regarde des observables liées à des lacets que l’on peut tracer dans un graphe, ou approcher par des lacets que l’on peut tracer dans des graphes. Le contenu de cette section, qui n’a pas d’application extrinsèque, n’a pour vocation que de rassurer le lecteur quant au bien-fondé de cette morale.

Pour définir un tel processus limite, nous devons décrire un espace de chemins qui remplace/généralise celui des chemins tracés dans un graphe.

Définition 2.5.1. Soit Σ une surface compacte lisse. Un *chemin paramétré* sur Σ est un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ qui est soit constant, soit lipschitzien, de vitesse bornée inférieurement par une constante strictement positive. Un *chemin* sur Σ est une classe d’équivalence de chemins paramétrés sur Σ pour la relation d’équivalence

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \exists \Phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ homéomorphisme bi-lipschitzien croissant t.q. } \gamma = \gamma' \circ \Phi.$$

On note $P(\Sigma)$ l’ensemble des chemins de Σ . De même, on note $L(\Sigma)$ l’ensemble des *lacs* de Σ , c’est-à-dire des chemins fermés.

La raison pour laquelle on demande que les chemins non constants soient lipschitziens et de vitesse bornée inférieurement, est que cela permet de choisir de manière “canonique” un paramétrage à vitesse constante.

Le résultat, dû à Lévy [Lév10], est le suivant.

Théorème 2.5.1. Soit M une surface compacte munie d’une mesure d’aire lisse vol , et G un groupe de Lie compact, dont l’algèbre de Lie est munie d’un produit scalaire invariant. Il existe une famille de variables aléatoires $(H_\ell)_{\ell \in L(\Sigma)}$ telle que

(i) Pour toute carte $\mathbb{G} = (V, E, F)$ plongée dans Σ , la loi de $(H_e)_{e \in E}$ est donnée par la mesure de Yang–Mills discrète sur $\mathbb{G}$.

(ii) Pour toute famille (ℓ_n) de lacets qui convergent⁶ vers un lacet ℓ , la suite de variables

6. Ici, il s’agit d’une convergence uniforme des chemins paramétrés à vitesse constante, cf. [Lév10].

aléatoires $(H_{\ell_n})_n$ converge en probabilité vers n .

La démonstration de ce théorème nécessite de nombreux développements techniques en théorie de la mesure et en géométrie riemannienne, et plutôt que de les énoncer, nous nous contenterons de faire quelques remarques :

- Le bon point de vue, pour avoir un système projectif de mesures, est de se restreindre à des mesures de Yang–Mills discrète pour des graphes dont les plongements des arêtes sont géodésiques par morceaux. Cela implique de fixer une métrique riemannienne sur M , ce qui est plus rigide qu’une mesure d’aire.
- On peut montrer que les mesures de Yang–Mills discrètes ne dépendent pas du choix de la métrique riemannienne, ce qui permet a posteriori d’assouplir la structure.
- Le choix de régularité des lacets considérés sur M provient du fait qu’ils peuvent être obtenus comme limites de lacets géodésiques par morceaux⁷, ce qui justifie l’introduction du point (ii) dans le théorème 2.5.1.

7. C’est même le cas d’une plus grande classe de lacets, les lacets *rectifiables*, c’est-à-dire continus et de longueur finie. Il est à noter que même si la longueur d’un chemin dépend d’une métrique, le fait d’être de longueur finie est indépendant de celle-ci.

Chapitre 3

Transformée de Fourier de la fonction de partition

Dans ce chapitre, nous allons survoler les principaux résultats de la théorie des représentations des groupes compacts nécessaires à la réécriture de la fonction de partition en une somme plutôt qu’une intégrale. La principale référence sur laquelle nous nous reposerons est le livre [Far08], mais d’autres ouvrages plus généraux et/ou avancés pourront être consultés avec profit, par exemple [BD95 ; Bum13 ; Hal15].

De manière générale, la théorie des représentations consiste à établir un morphisme entre un espace muni d’une certaine structure (groupe, algèbre associative, algèbre de Lie...) et un espace de matrices muni de la même structure. Intuitivement, l’idée est de se ramener à de l’algèbre linéaire car c’est une théorie simple et puissante. D’un point de vue formel, quoiqu’un peu pédant, étant donné une catégorie $\mathcal{C}$ et un objet $A \in \mathcal{C}$, cela revient à étudier un morphisme $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \text{End}(V))$, où V est un espace vectoriel. Ainsi, au lieu de décrire l’espace A à l’aide de ses points, on le décrit à l’aide des différentes façons de représenter ses points sous forme matricielle. L’idée est donc de se ramener à des espaces que l’on connaît bien, mais la philosophie est un peu différente de l’algèbre linéaire ou de la géométrie différentielle, où l’on se ramène systématiquement à des espaces de même dimension et décrits à l’aide de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: ici, on va considérer des représentations dans des espaces vectoriels de toutes sortes de dimensions, et l’étude simultanée de toutes ces représentations permet de décrire de manière *duale* l’espace que l’on représente. Cette dualité s’exprimera plus clairement lorsque nous verrons le théorème de Peter–Weyl pour les groupes compacts, qui est le principal résultat dont nous nous servirons. Pour ce faire, nous allons d’abord établir quelques généralités sur les représentations des groupes de Lie compacts, puis énoncer le théorème et certaines de ses conséquences. Nous finirons ce chapitre par l’application de cette théorie au noyau de la chaleur, ce qui nous permettra de convertir l’étude de la fonction de partition de Yang–Mills en un problème purement combinatoire.

3.1 Représentations de groupes compacts

Définition 3.1.1. Soit G un groupe de Lie. Une *représentation* réelle (resp. complexe) de G est la donnée d'un espace vectoriel réel (resp. complexe) V et d'un morphisme¹ de groupes de Lie $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. Le *degré* de ρ , aussi appelé *dimension* de ρ , est la dimension de V .

Remarque 3.1.1. Il peut exister des représentations de dimension finie ou infinie, mais en pratique nous allons surtout rencontrer des représentations de dimension finie.

Le morphisme considéré est parfois sous-entendu, de sorte que l'on appelle $V = V_\rho$ la représentation par abus de langage. Cela provient du fait que la représentation peut se voir comme une action lisse de G sur V :

$$g \cdot v = \rho(g)v, \quad \forall g \in G, \forall v \in V.$$

Exemples. La *représentation triviale* d'un groupe de Lie G sur un espace vectoriel V est la représentation

$$\rho(g)v = v, \quad \forall g \in G, \forall v \in V.$$

Si $G \subset \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$ est un groupe de Lie matriciel, la *représentation standard* de G est la représentation suivante sur $\mathbb{C}^N$:

$$\rho(g)v = gv, \quad \forall g \in G, \forall v \in V.$$

Définition 3.1.2. Une représentation (ρ, V) d'un groupe de Lie G est dite *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels de V stables par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$ sont $\{0\}$ et V .

Les représentations irréductibles sont en quelque sorte les briques élémentaires de la théorie des représentations des groupes compacts. Pour voir cela, il nous faut ajouter une structure algébrique supplémentaire.

Définition 3.1.3. Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, et $\| \cdot \|$ la norme associée. Une représentation ρ d'un groupe de Lie G dans $\mathcal{H}$ est *unitaire* si

$$\|\pi(g)v\| = \|v\|, \quad \forall g \in G, \forall v \in \mathcal{H}.$$

Si (ρ, V) est une représentation d'un groupe de Lie compact G dans un espace vectoriel de dimension finie, alors il existe toujours un produit scalaire sur V pour lequel ρ est unitaire. En effet, si l'on prend n'importe quel produit scalaire de départ $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle v, w \rangle = \int_G \langle \rho(g)v, \rho(g)w \rangle_0 dg, \quad \forall (v, w) \in V^2,$$

rend bien ρ unitaire. Nous pouvons à présent énoncer le résultat promis plus haut.

1. Un morphisme de groupes de Lie est simplement un morphisme de groupes qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 3.1.1. *Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie d'un groupe de Lie compact G . Il existe des sous-espaces vectoriels $V_1, \dots, V_n$ de V stables par ρ et irréductibles tels que*

$$V = \bigoplus_{k=1}^n V_k.$$

Démonstration. On suppose, sans perdre de généralité, que ρ est unitaire. Soit V_1 un sous-espace stable non nul de dimension minimale. Alors son supplémentaire orthogonal $V_1^\perp$ est également un sous-espace stable. Si $V_1^\perp = \{0\}$, alors ρ est irréductible et la décomposition est triviale : $V = V_1$. Sinon, on a $V = V_1 \oplus V_1^\perp$, et on reproduit les mêmes arguments itérativement sur $V^\perp$, un nombre fini de fois puisque V est de dimension finie. $\square$

Dans la proposition précédente, si l'on note $\rho_k = \rho|_{V_k}$ pour $1 \leq k \leq n$, on voit bien que $(\rho_k, V_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille de représentations irréductibles, et ρ admet une décomposition en somme directe

$$\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_n$$

de représentations irréductibles. L'étude de ρ se résume alors à analyser séparément chaque composante irréductible. Pour cela, nous pouvons nous servir des opérateurs d'entrelacement.

Définition 3.1.4. Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations d'un groupe de Lie G . Une application linéaire $A \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ est un *entrelacement* entre ρ_1 et ρ_2 si elle vérifie

$$A\rho_1(g) = \rho_2(g)A, \quad \forall g \in G.$$

On dit aussi que A est *G -équivariante*.

Lemme 3.1.2 (Schur). *Soit A est un entrelacement entre deux représentations irréductibles (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) d'un groupe de Lie G . Alors l'une des deux affirmations suivantes est vraie :*

- (i) $A = 0$,
- (ii) A est un isomorphisme.

De plus, si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$A = \lambda I_{V_1}.$$

Démonstration. Le sous-espace $\ker A$ est stable par ρ_1 , donc par irréductibilité on a soit $\ker A = 0$, soit $\ker A = V_1$. Si $A \neq 0$, il vient que l'application A est injective. On montre par un même raisonnement que A est surjective si elle n'est pas nulle.

Pour le second point, en utilisant le théorème fondamental de l'algèbre, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A - \lambda I_{V_1}$ ne soit pas inversible ; or cet opérateur commute avec ρ_1 , donc nécessairement $A - \lambda I = 0$ d'après le premier point. $\square$

Remarque 3.1.2. Le second point du lemme de Schur dépend de manière cruciale du fait que l'on considère des représentations complexes ; ce n'est plus vrai pour des représentations réelles. C'est pour cela qu'à partir de maintenant on va toujours supposer que les représentations sont complexes.

Le lemme de Schur nous permet de définir une relation d'équivalence sur les représentations irréductibles : deux représentations irréductibles (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont dites équivalentes si elles sont entrelacées par une application linéaire non nulle. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles.

Théorème 3.1.3. *Si G est un groupe de Lie abélien, toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1. De plus, l'ensemble $\widehat{G}$ peut être muni d'une structure de groupe, et on l'appelle groupe dual de G .*

Démonstration. Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G . Soit $g \in G$. Pour tout $h \in G$, l'application linéaire $A = \rho(g)$ commute avec $\rho(h)$, donc d'après le lemme de Schur, il existe $\chi(g) \in \mathbb{C}$ tel que $\rho(g) = \chi(g)I_V$. On en déduit que ρ est bien de degré 1. Pour voir que $\widehat{G}$ est un groupe, il suffit d'établir que

$$\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}),$$

et utiliser la structure de groupe des morphismes (de groupes de Lie) de G dans $\mathbb{C}$. L'égalité découle d'une double inclusion immédiate. $\square$

Exemple. Le groupe $U(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ est bien un groupe abélien. Toute représentation irréductible de $U(1)$ est de la forme $\rho(z) = z^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$, donc $\widehat{U}(1) \simeq \mathbb{Z}$.

3.2 Théorème de Peter–Weyl

Soit G un groupe compact. La *représentation régulière droite* de G est la représentation $R : G \mapsto \text{End}(L^2(G))$ définie par

$$R(g)f : x \mapsto f(xg), \quad \forall x \in G, \forall g \in G.$$

Une fois n'est pas coutume, il s'agit d'une représentation *de dimension infinie*. La plupart des résultats présentés dans la section précédente ne s'appliquent donc pas ; en particulier, elle n'est pas irréductible. Le principal théorème de cette section est l'analogue la proposition 3.1.1 dans ce contexte. Sa démonstration est plus délicate et nécessite des outils d'analyse fonctionnelle plus avancés, mais repose sur un principe similaire, qui est l'orthogonalité de sous-espaces de $L^2(G)$ associés à aux représentations irréductibles de G .

Définition 3.2.1. Soit $(\rho, \mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie compact G . L'espace des *coefficients matriciels* de ρ est le sous-espace de Hilbert $\mathcal{M}_\rho$ de $L^2(G)$ constitué des fonctions de la forme

$$g \mapsto \langle \rho(g)u, v \rangle,$$

pour $u, v \in \mathcal{H}$.

Si $(\rho, \mathcal{H})$ est une représentation unitaire irréductible de G et $\{e_1, \dots, e_k\}$ est une base orthonormale de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, alors on peut vérifier sans peine que $\mathcal{M}_\rho$ est engendré par les *coefficients matriciels élémentaires*

$$\rho_{ij} : g \mapsto \langle \rho(g)e_i, e_j \rangle, \quad \forall 1 \leq i, j \leq k.$$

Ces fonctions en forment même une base, en conséquence du Théorème 3.2.1 ci-dessous.

Il existe deux résultats portant le même nom, les *relations d'orthogonalité de Schur*. Le premier est une relation d'orthogonalité entre différents coefficients matriciels élémentaires d'une même représentation unitaire irréductible, et le second une relation d'orthogonalité entre les espaces de coefficients matriciels de deux représentations unitaires irréductibles. La démonstration de ces résultats découle du lemme de Schur, et on pourra en trouver une preuve par exemple dans [Far08].

Théorème 3.2.1 (Relations d'orthogonalité de Schur, I). *Soit $(\rho, \mathcal{H})$ une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie compact G . On note $d_\rho = \dim \mathcal{H}$ sa dimension. Pour tout $u, v, u', v' \in \mathcal{H}$, on a*

$$\int_G \langle \rho(g)u, v \rangle \overline{\langle \rho(g)u', v' \rangle} dg = \frac{1}{d_\rho} \langle u, u' \rangle \langle v, v' \rangle. \quad (3.2.1)$$

En particulier, si $\{e_1, \dots, e_{d_\rho}\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, alors on a

$$\int_G \rho_{ij}(g) \overline{\rho_{kl}(g)} dg = \frac{1}{d_\rho} \delta_{ik} \delta_{jl}. \quad (3.2.2)$$

Théorème 3.2.2 (Relation d'orthogonalité de Schur, II). *Soit $(\rho, \mathcal{H})$ et $(\rho', \mathcal{H}')$ deux représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie compact G . Si ρ et ρ' ne sont pas équivalentes, alors $\mathcal{M}_\rho$ et $\mathcal{M}_{\rho'}$ sont orthogonaux dans $L^2(G)$.*

Une conséquence de ces relations d'orthogonalité, que nous admettrons également car sa preuve fait intervenir la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints sur les espaces de Hilbert, est le théorème suivant, fondamental pour la théorie des représentations des groupes compacts.

Théorème 3.2.3 (Peter–Weyl). *Soit G un groupe de Lie compact. Pour tout $\lambda \in \widehat{G}$, on note $\mathcal{M}_\lambda$ l'espace des coefficients matriciels d'une représentation de la classe λ . Alors*

$$L^2(G) = \widehat{\bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \mathcal{M}_\lambda}. \quad (3.2.3)$$

Une des principales applications du théorème de Peter–Weyl est la formule de Plancherel pour les groupes compacts, que nous verrons dans la prochaine section. Avant cela, nous allons réécrire le théorème de Peter–Weyl sous une autre forme, un peu plus spécifique.

Définition 3.2.2. Soit G un groupe de Lie compact. Une fonction $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ est *centrale* si pour tout $(g, h) \in G^2$, $f(ghg^{-1}) = f(h)$.

Une famille particulière de fonctions centrales va nous intéresser : il s'agit des fonctions

$$\chi_\rho : g \mapsto \text{Tr}(\rho(g)),$$

pour des représentations ρ de G de dimension finie. Par convention, si ρ est une représentation irréductible de la classe $\lambda \in \widehat{G}$, on notera χ_λ le caractère associé à ρ .

Proposition 3.2.4. *Soit ρ_1, ρ_2 deux représentations de G de dimension finie. On a les résultats suivants :*

$$\begin{aligned}\chi_{\rho_1}(1_G) &= \dim \rho_1, \\ \chi_{\rho_1 \oplus \rho_2}(g) &= \chi_{\rho_1}(g) + \chi_{\rho_2}(g), \quad \forall g \in G, \\ \chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) &= \chi_{\rho_1}(g) \chi_{\rho_2}(g), \quad \forall g \in G, \\ \chi_{\rho_1^*}(g) &= \chi_{\rho_1}(g^{-1}) = \overline{\chi_{\rho_1}(g)}, \quad \forall g \in G.\end{aligned}$$

Démonstration. Exercice. □

Le théorème de Peter–Weyl peut se réécrire à l’aide des caractères irréductibles, si l’on considère les fonctions centrales au lieu de fonctions quelconques. Nous noterons $L^2(G)^G$ l’ensemble des fonctions centrales de carré intégrable sur G , qui est un sous-espace de Hilbert de $L^2(G)$. Le théorème de Peter–Weyl admet la variante suivante pour les fonctions centrales.

Théorème 3.2.5 (Peter–Weyl). *Pour tout groupe de Lie compact G , l’ensemble $\{\chi_\lambda, \lambda \in \widehat{G}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(G)^G$.*

Concluons cette section par un corollaire du théorème de Peter–Weyl, qui assure que tout groupe compact peut être vu comme un groupe matriciel.

Corollaire 3.2.6 ([Kna02], Cor. 4.22). *Soit G un groupe topologique compact. Il possède une représentation bijective de dimension finie, et est donc isomorphe à un sous-groupe fermé du groupe linéaire.*

3.3 Transformée de Fourier

Définition 3.3.1. La *transformée de Fourier* de $f \in L^2(G)$ est la fonction $\hat{f} : \widehat{G} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}_\lambda)$ définie par

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g) \rho_\lambda(g^{-1}) dg,$$

où $(\rho_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$ est une représentation irréductible unitaire de G de la classe λ .

On rappelle que si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert de dimension fini, on peut munir $\text{End}(\mathcal{H})$ de la norme de *Hilbert–Schmidt*

$$\|A\| = \text{Tr}(AA^*), \quad \forall A \in \text{End}(\mathcal{H}).$$

Théorème 3.3.1 (Théorème de Plancherel). *L’application $f \mapsto \hat{f}$ est un isomorphisme unitaire d’espaces de Hilbert entre $L^2(G)$ et l’espace des suites $A = (A_\lambda)_{\lambda \in \widehat{G}}$ d’opérateurs $A_\lambda \in \text{End}(\mathcal{H}_\lambda)$ qui vérifient*

$$\|A\|^2 = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda \|A_\lambda\|^2 < \infty.$$

De plus, pour toute $f \in L^2(G)$, on a

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda \text{Tr}(\hat{f}(\lambda) \rho_\lambda(g)). \tag{3.3.1}$$

On peut donner une interprétation de (3.3.1) en termes de convolution.

Corollaire 3.3.2. *Soit $f \in L^2(G)$ pour G un groupe de Lie compact. On a l'égalité suivante dans $L^2(G)$:*

$$f(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda (f * \chi_\lambda)(g). \quad (3.3.2)$$

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \widehat{G}$, on se donne une représentation $(\rho_\lambda, \mathcal{H}_\lambda)$. Par (3.3.1) et la définition des coefficients de Fourier, on a

$$f(g) = \sum_{\lambda} d_\lambda \operatorname{Tr} \left(\int_G f(h) \rho_\lambda(h^{-1}) dh \rho_\lambda(g) \right),$$

et par linéarité de la trace il vient

$$f(g) = \sum_{\lambda} d_\lambda \int_G f(h) \operatorname{Tr}(\rho_\lambda(h^{-1}) \rho_\lambda(g)) dh.$$

Le résultat provient ensuite de simplifications évidentes. $\square$

3.4 Décomposition en caractères du noyau de la chaleur

Rappelons que le noyau de la chaleur sur un groupe de Lie compact G est le semi-groupe de convolution $(p_t)_{t \geq 0}$ solution fondamentale de l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_t(g) &= \frac{1}{2} \Delta_G p_t(g), \quad \forall g \in G, \forall t > 0, \\ \lim_{t \downarrow 0} p_t &= \delta_{1_G}. \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Il dépend naturellement du choix de la métrique dont on munit $\mathfrak{g}$. Comme pour l'étude de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$, l'utilisation de la transformée de Fourier permet de donner une expression explicite du noyau de la chaleur à l'aide des valeurs propres et des vecteurs propres du laplacien. Une première remarque est que les caractères irréductibles forment des vecteurs propres.

Proposition 3.4.1. *Soit G un groupe de Lie compact. L'ensemble $\{\chi_\lambda, \lambda \in \widehat{G}\}$ définit une base hilbertienne de vecteurs propres de Δ_G . On note $c_2(\lambda) \geq 0$ la valeur propre de $-\Delta_G$ associée à χ_λ .*

Démonstration. À faire. $\square$

Le principal résultat de cette section est le suivant.

Théorème 3.4.2. *Soit G un groupe de Lie compact. Le noyau de la chaleur (p_t) admet la décomposition suivante, satisfaite ponctuellement pour tout $t > 0$ et dans $L^2(G)$ pour tout $t \geq 0$:*

$$p_t(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} e^{-\frac{t}{2} c_2(\lambda)} d_\lambda \chi_\lambda(g), \quad \forall g \in G. \quad (3.4.2)$$

Démonstration. D'après la formule de Plancherel, on a pour tout $t > 0$ et pour tout $g \in G$

$$p_t(g) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda (p_t * \chi_\lambda)(g).$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale et l'équation de la chaleur, on a

$$\frac{d}{dt}(p_t * \chi_\lambda)(g) = \left(\left(\frac{d}{dt} p_t \right) * \chi_\lambda \right)(g) = \frac{1}{2}((\Delta_G p_t) * \chi_\lambda)(g).$$

D'autre part, en intégrant par parties il vient que

$$(\Delta_G p_t) * \chi_\lambda = (p_t * \Delta_G \chi_\lambda),$$

donc en utilisant le fait que $\Delta_G \chi_\lambda = -c_2(\lambda) \chi_\lambda$ on obtient

$$\frac{d}{dt}(p_t * \chi_\lambda)(g) = -c_2(\lambda)(p_t * \chi_\lambda)(g), \quad \forall g \in G.$$

En résolvant cette équation différentielle pour tout $\lambda \in \widehat{G}$, on dispose de tous les éléments pour conclure. $\square$

Exemple. Dans le cas où $G = \mathrm{U}(1)$, on retrouve une expression classique du noyau de la chaleur sur le cercle : rappelons que les caractères irréductibles de $\mathrm{U}(1)$ sont les fonctions $\chi_n : e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, et on peut vérifier sans peine que $\Delta \chi_n = -n^2 \chi_n$, donc le théorème 3.4.2 donne

$$p_t(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{t}{2}n^2 + in\theta}.$$

3.5 Calcul exact de la fonction de partition

Nous avons vu au chapitre 2 l'expression de la fonction de partition de Yang–Mills sur une surface de genre $g \geq 0$ pour un groupe compact G donné, à l'aide du noyau de la chaleur sur G . Nous pouvons désormais la réécrire à l'aide de la décomposition du noyau de la chaleur.

Lemme 3.5.1. *Soit G un groupe compact. Pour tout $g \geq 1$, on a*

$$Z_G(g, t) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} e^{-\frac{t}{2}c_2(\lambda)} d_\lambda \int_{G^{2g}} \chi_\lambda([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i. \quad (3.5.1)$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de (2.3.7) et du théorème 3.4.2. $\square$

Il reste ainsi à comprendre comment calculer l'intégrale d'un caractère irréductible appliqué à un produit de commutateur. Pour ce faire, il suffit en réalité de comprendre un cas “générique” résumé dans la proposition suivante.

Proposition 3.5.2. *Soit G un groupe compact, et $\lambda \in \widehat{G}$ une classe d'équivalence de représentations irréductibles. Pour tout $x, y \in G$, on a*

$$\int_G \chi_\lambda(xgyg^{-1})dg = \frac{\chi_\lambda(x)\chi_\lambda(y)}{d_\lambda}. \quad (3.5.2)$$

Démonstration. Pour tout x , la fonction

$$F_{\lambda,x}(y) = \int_G \chi_\lambda(xgyg^{-1})dg$$

est centrale en y . Par le lemme de Schur, elle est donc proportionnelle à χ_λ :

$$F_{\lambda,x}(y) = \frac{1}{d_\lambda} F_{\lambda,x}(1_G) \chi_\lambda(y) = \frac{1}{d_\lambda} \chi_\lambda(x) \chi_\lambda(y).$$

□

On aura également besoin d'une formule qui exprime la convolution des caractères irréductibles.

Proposition 3.5.3. *Soit G un groupe compact et $\lambda, \mu \in \widehat{G}$ deux classes d'équivalence de représentations irréductibles. On a*

$$\chi_\lambda * \chi_\mu = \frac{\chi_\lambda}{d_\lambda} \delta_{\lambda,\mu}. \quad (3.5.3)$$

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $x \in G$,

$$\int_G \chi_\lambda(xy) \chi_\mu(y^{-1}) dy = \frac{\chi_\lambda(x)}{d_\lambda} \delta_{\lambda,\mu}.$$

Pour cela, soit $(\rho_\lambda, V^\lambda)$ une représentation unitaire de la classe d'équivalence de λ , supposée unitaire. On a la représentation matricielle $\rho_\lambda(x) = (\rho_\lambda^{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq d}$, où $d = d_\lambda$, et

$$\rho_\lambda^{ij}(x) = \langle \rho_\lambda(x) e_i, e_j \rangle.$$

Le caractère $\chi_\lambda(x)$ est la trace (au sens usuel) de la matrice (ρ_λ^{ij}) . Ainsi,

$$\chi_\lambda(xy) = \text{Tr}(\rho_\lambda(xy)) = \text{Tr}(\rho_\lambda(x)\rho_\lambda(y)) = \sum_{i,j=1}^{d_\lambda} \rho_\lambda^{ij}(x) \rho_\lambda^{ji}(y).$$

On définit de façon analogue ρ_μ , et on obtient

$$\chi_\lambda(xy) \chi_\mu(y^{-1}) = \chi_\lambda(xy) \overline{\chi_\mu(y)} = \sum_{i=1}^{d_\lambda} \sum_{j=1}^{d_\lambda} \sum_{k=1}^{d_\mu} \rho_\lambda^{ij}(x) \rho_\lambda^{ji}(y) \overline{\rho_\mu^{kk}(y)}.$$

Si l'on intègre par rapport à y , on obtient par linéarité

$$\sum_{i,j,k} \rho_\lambda^{ij}(x) \int_G \rho_\lambda^{ji}(y) \rho_\mu^{kk}(y^{-1}) dy = \sum_{i,j,k} \rho_\lambda^{ij}(x) \int_G \rho_\lambda^{ji}(y) \overline{\rho_\mu^{kk}(y)} dy,$$

et la relation d'orthogonalité pour les coefficients matriciels permet de déduire que

$$\chi_\lambda * \chi_\mu(x) = \frac{1}{d_\lambda} \sum_{i=1}^{d_\lambda} \rho_\lambda^{ii}(x) \delta_{\lambda,\mu},$$

ce qui donne bien le résultat attendu. $\square$

La proposition précédente donne en quelque sorte les constantes de structure de l'algèbre de convolution engendrée par les caractères irréductibles. Il est à noter qu'il existe aussi un résultat analogue où le produit de convolution est remplacé par le produit usuel, dans le cas où on considère des représentations irréductibles de dimension finie de $G = \mathrm{GL}(N, \mathbb{C})$: c'est la *règle de Littlewood–Richardson*, et les constantes de structure associées sont appelées *coefficients de Littlewood–Richardson*. L'étude de ces coefficients est encore un domaine de recherche foisonnant.

Proposition 3.5.4. *Soit G un groupe compact, et $\lambda \in \widehat{G}$ une classe d'équivalence de représentations irréductibles. Pour tout $g \geq 1$, on a*

$$\int_{G^{2g}} \chi_\lambda([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i = d_\lambda^{1-2g}. \quad (3.5.4)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur g . Le cas $g = 1$ se montre ainsi : on applique la Proposition 3.5.2 à $x = x_1$ et $y = x_1^{-1}$ et on intègre par rapport à x_1 . On obtient

$$\int_{G^2} \chi_\lambda(x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1}) dx_1 dy_1 = \int_G \frac{\chi_\lambda(x_1) \chi_\lambda(x_1^{-1})}{d_\lambda} = 1,$$

où la dernière égalité découle des relations d'orthogonalité de Schur. Pour l'hérédité, on suppose l'égalité pour g fixé. Alors

$$\begin{aligned} \int_{G^{2g+2}} \chi_\lambda([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g][x, y]) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i dx dy = \\ \frac{1}{d_\lambda} \int_{G^{2g+1}} \chi_\lambda([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]x) \chi_\lambda(x^{-1}) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i dx. \end{aligned}$$

Le terme de droite peut se réécrire

$$\frac{1}{d_\lambda} \int_{G^{2g}} (\chi_\lambda * \chi_\lambda)([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i = \frac{1}{d_\lambda^2} \int_{G^{2g}} \chi_\lambda([x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g]) \prod_{i=1}^g dx_i dy_i,$$

en utilisant la formule de convolution des caractères. On peut alors conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence. $\square$

Remarque 3.5.1. Une question encore ouverte est celle de l'intégration d'un produit arbitraire de caractères, ou d'un caractère appliqué à un autre mot que le commutateur de deux variables. Dans une série de travaux remarquables, Magee et Puder ont étudié de manière assez profonde le cas où l'on intègre, non pas un produit de caractères, mais un produit de traces [MP19], appliqués à des mots arbitraires en k variables.

Nous pouvons finalement réécrire la fonction de partition sans qu'aucune intégrale ne subsiste. Cela donne une formule initialement écrite par Migdal [Mig75].

Théorème 3.5.5. *Soit G un groupe compact, Σ_g une surface de genre $g \geq 1$ et d'aire $t > 0$. La fonction de partition de Yang–Mills s'écrit*

$$Z_G(g, t) = \sum_{\lambda \in \hat{G}} e^{-\frac{t}{2} c_2(\lambda)} d_\lambda^{2-2g}. \quad (3.5.5)$$

Démonstration. Découle du Lemme 3.5.1 et de la Proposition 3.5.4. □

Chapitre 4

Étude asymptotique de la fonction de partition

Forts des résultats généraux de la théorie des représentations des groupes compacts, qui ont permis d'écrire la fonction de partition de Yang–Mills comme une somme sur les représentations irréductibles du groupes plutôt que comme une intégrale, nous allons dans ce chapitre étudier le cas particulier du groupe unitaire $U(N)$. Comme vu précédemment, la fonction de partition sur une surface de genre $g \geq 0$ et d'aire $t > 0$ s'écrit

$$Z_G(g, t) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda^{2-2g} e^{-\frac{t}{2} c_2(\lambda)},$$

donc l'étude asymptotique de $Z_{U(N)}(g, t)$ quand $N \rightarrow \infty$ se résume à comprendre le comportement asymptotique des dimensions d_λ et des nombres de Casimir $c_2(\lambda)$ pour $\lambda \in \widehat{U}(N)$.

Pour ce faire, nous allons d'abord décrire les représentations irréductibles de $U(N)$ et de $SU(N)$, qui sont intimement liées, et étudier la série sur $\widehat{SU}(N)$ de terme général d_λ^{-s} pour $s > 1$, appelée *Fonction zêta de Witten*, ce qui nous permettra de montrer la convergence de $Z_{U(N)}(g, t)$ pour tout $g \geq 2$ et $t \geq 0$. Ensuite, pour étudier la fonction de partition $Z_{U(N)}(1, t)$ nous aurons besoin d'exprimer les représentations irréductibles de $U(N)$ à l'aide de partitions, ce qui permettra de contrôler efficacement $c_2(\lambda)$ et son comportement limite. En guise de conclusion, nous verrons ce qu'il advient de la fonction de partition sur la sphère.

4.1 Représentations de $U(N)$ et plus hauts poids

Dans cette section, nous allons décrire les représentations irréductibles de $U(N)$ en utilisant le théorème du plus haut poids, qui provient initialement de la théorie des représentations des algèbres de Lie semi-simples. Ce cours n'aspirant pas à se substituer à un cours plus complet sur les algèbres de Lie, nous l'admettrons afin de nous concentrer sur ses conséquences combinatoires.

Notons pour commencer que le sous-groupe $T_N \subset U(N)$ constitué des matrices diago-

nales est un sous-groupe commutatif. Dans ce cas, les caractères continus de T_N s'écrivent

$$\chi(t) = t_1^{\mu_1} \cdots t_N^{\mu_N}, \quad \forall t = \text{diag}(t_1, \dots, t_N) \in T_N,$$

pour un certain N -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$. À chaque caractère on peut alors associer la forme linéaire $\mu \in \mathfrak{h}_N^*$ définie par

$$\mu(H) = \mu_1 h_1 + \cdots + \mu_N h_N, \quad \forall H = \text{diag}(h_1, \dots, h_N) \in \mathfrak{h}_N. \quad (4.1.1)$$

Définition 4.1.1. Toute forme linéaire de la forme (4.1.1) est appelée un *poids*, ainsi que le N -uplet $(\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$.

On peut vérifier sans peine que pour tout $H \in \mathfrak{h}_N$,

$$\chi(\exp H) = e^{\mu(H)}.$$

De plus, l'ensemble $P = \mathfrak{h}_N^* \simeq \mathbb{Z}^N$ est un réseau, appelé *réseau des poids*.

Définition 4.1.2. Soit (ρ, V) une représentation de $U(N)$. Un vecteur $v \in V$ est un *vecteur de plus haut poids* s'il existe un poids $\lambda \in P$ tel que

$$d\rho(H)v := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \rho(\exp(tH)) = \lambda(H)v, \quad \forall H \in \mathfrak{h}_N,$$

$$d\rho(X)v = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{n}_N.$$

Remarque 4.1.1. La différentielle $d\rho$ définit une représentation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{u}_N$, appelée *représentation dérivée*. Nous ne développerons toutefois pas cet aspect.

Théorème 4.1.1. Soit (ρ, V) une représentation de $U(N)$ de dimension finie. Alors elle possède un vecteur de plus haut poids. De plus, elle est irréductible si et seulement si tous les vecteurs de plus haut poids sont colinéaires. Le cas échéant, le poids associé est appelé le plus haut poids de ρ .

Grâce à ce théorème, nous savons que décrire les représentations irréductibles du groupe unitaire revient à décrire l'ensemble de ses plus hauts poids. C'est en fait une conséquence du résultat suivant.

Théorème 4.1.2 (Formule du caractère de Weyl). Les plus hauts poids de $U(N)$ sont en bijection avec les N -uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{Z}^N$ tels que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$. De plus, pour toute représentation irréductible de plus haut poids λ , pour tout $U \in U(N)$ de valeurs propres $(x_1, \dots, x_N)$,

$$\chi_\lambda(U) = s_\lambda(x_1, \dots, x_N), \quad (4.1.2)$$

où s_λ est la fonction de Schur définie par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det \left[x_i^{\lambda_j + N - j} \right]_{1 \leq i, j \leq N}}{\det \left[x_i^{N - j} \right]_{1 \leq i, j \leq N}}.$$

Remarque 4.1.2. Les fonctions de Schur sont des fonctions de Laurent symétriques, et même des polynômes symétriques lorsque tous les λ_i sont positifs. Le dénominateur n'est autre que le déterminant de Vandermonde, que l'on notera aussi $V(1, \dots, N)$.

Corollaire 4.1.3 (Formule de la dimension de Weyl). *Soit $\lambda \in \widehat{U}(N)$. Alors sa dimension vérifie*

$$d_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}. \quad (4.1.3)$$

Démonstration. On rappelle que $d_\lambda = \chi_\lambda(I_N)$, donc on est tenté de calculer $s_\lambda(1, \dots, 1)$ directement en utilisant la formule du caractère de Weyl. Il se trouve que c'est impossible car on obtient une forme indéterminée. Pour cela, on use d'une astuce bien utile : on fixe $q \in (0, 1)$ et on calcule $s_\lambda(1, q, q^2, \dots, q^{N-1})$ puis on fait tendre q vers 1. La formule en découle directement. $\square$

4.2 Fonctions zêta de Witten

Si G est un groupe compact connexe simplement connexe, on définit sa *fonction zêta de Witten* comme le prolongement méromorphe de la série

$$\zeta_G(s) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}} d_\lambda^{-s},$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$. Cette fonction a été nommée ainsi par Zagier [Zag94] en raison de son apparition dans des travaux de Witten [Wit91], et parce qu'elle généralise la fonction zêta de Riemann : en effet, si l'on prend $G = \mathrm{SU}(2)$, on a

$$\zeta_{\mathrm{SU}(2)}(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Par souci de simplicité, on admettra que pour tout $s > 1$, $\sup_N \zeta_{\mathrm{SU}(N)}(s) < \infty$. Pour une preuve, voir [Lem22, Prop. 2.2]. Le principal résultat qui nous intéresse ici est le suivant :

Lemme 4.2.1. *Pour tout $s > 1$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\zeta_{\mathrm{SU}(N)}(s) - 1| = 0. \quad (4.2.1)$$

Démonstration. On part de la formule de la dimension de Weyl (Théorème 4.1.3), qui donne directement que la représentation $\lambda = (0, \dots, 0)$ est de dimension 1. Pour estimer la dimension de $\lambda \neq (0, \dots, 0)$, on effectue un changement de variables

$$\begin{aligned} m_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 + 1, \\ m_2 &= \lambda_2 - \lambda_3 + 1, \\ &\vdots \\ m_{N-1} &= \lambda_{N-1} - \lambda_N + 1. \end{aligned}$$

Notons que la condition $(\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N = 0)$ équivaut à $m_1, \dots, m_{N-1} \geq 0$. On obtient

$$d_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i + \dots + m_{j-1}}{j - i}.$$

Cette expression est clairement croissante en les m_i , donc les plus petites valeurs possibles de d_λ sont pour $\lambda_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\lambda_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\lambda_{N-1} = (1, \dots, 1, 0)$. Autrement dit, pour tout $\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N) \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et pour tout $1 \leq i \leq N-1$,

$$d_\lambda \geq d_{\lambda_i} = \binom{N}{i}.$$

On en déduit notamment que $d_\lambda \geq N$ pour tout plus haut poids non trivial. À partir de ce moment c'est gagné : on fixe $1 < s' < s$, et on a

$$\zeta_{\text{SU}(N)}(s) - 1 = \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N) \\ \lambda \neq (0, \dots, 0)}} d_\lambda^{-s} = \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N) \\ \lambda \neq (0, \dots, 0)}} d_\lambda^{-s' - (s-s')} \leq N^{-(s-s')} \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N) \\ \lambda \neq (0, \dots, 0)}} d_\lambda^{-s'},$$

et le membre de droite tend bien vers 0 quand N tend vers l'infini. $\square$

On va utiliser ce résultat pour étudier la convergence de la fonction de partition pour une surface de genre $g \geq 2$. Avant cela, introduisons une autre fonction spéciale, un cas particulier de fonction thêta de Jacobi : la fonction $\theta : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et définie par

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n^2}.$$

Théorème 4.2.2. *Pour tout $g \geq 2$ et pour tout $t > 0$, on a la convergence suivante :*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{\text{U}(N)}(g, t) = \theta(q_t), \quad (4.2.2)$$

en posant $q_t = e^{-\frac{t}{2}}$.

Démonstration. On utilise la bijection suivante :

$$\begin{cases} \widehat{\text{SU}}(N) \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \widehat{\text{U}}(N) \\ (\lambda, n) & \longmapsto & \lambda + n := (\lambda_1 + n, \dots, \lambda_N + n). \end{cases}$$

On vérifie sans peine, en utilisant la formule de la dimension de Weyl, que $d_{\lambda+n} = d_\lambda$ pour tout $\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N)$ et tout $n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$Z_{\text{U}(N)}(g, t) = \sum_{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_t^{c_2(\lambda+n)} d_{\lambda+n}^{2-2g} = \sum_{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} q_t^{c_2(\lambda+n)} \right) d_\lambda^{2-2g}.$$

On sépare la somme sur λ en le terme $(0, \dots, 0)$ et le reste, en notant que $c_2(n, \dots, n) = n^2$:

$$Z_{\text{U}(N)}(g, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_t^{n^2} + \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{\text{SU}}(N) \\ \lambda \neq (0, \dots, 0)}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q_t^{c_2(\lambda+n)} d_\lambda^{2-2g}.$$

Or,

$$c_2(\lambda + n) = \frac{1}{N} \left(\sum_i (\lambda_i + n)^2 + \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) \right) \geq n^2,$$

étant donné que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N = 0$. Ainsi,

$$0 \leq Z_{U(N)}(g, t) - \theta(q_t) \leq \theta(q_t) \sum_{\substack{\lambda \in \widehat{SU}(N) \\ \lambda \neq (0, \dots, 0)}} d_\lambda^{2-2g},$$

et le terme de droite tend bien vers zéro d'après le Lemme 4.2.1, puisque pour $g \geq 2$, $2g - 2 > 1$. $\square$

Plusieurs remarques s'imposent à la suite de ce résultat et de sa démonstration.

- Les seuls plus hauts poids de $U(N)$ qui contribuent à la limite de la fonction de partition $Z_{U(N)}(g, t)$ sont ceux de la forme $(n, \dots, n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire des plus hauts poids constants. En un sens, cela indique que la limite est “triviale”.
- Si l'on se souvient que $\widehat{U}(1) = \mathbb{Z}$, et que l'on calcule la dimension et le Casimir de la représentation irréductible de $U(1)$ associée à $n \in \mathbb{Z}$, on vérifie sans peine que

$$Z_{U(1)}(g, t) = \theta(q_t), \quad \forall g \geq 0, \forall t > 0.$$

Le théorème précédent peut donc se traduire comme suit : pour tout $g \geq 2$ et $t > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{U(N)}(g, t) = Z_{U(1)}(g, t).$$

La fonction de partition devient asymptotiquement celle d'une théorie de jauge abélienne. C'est un phénomène que l'on peut aussi retrouver dans un autre régime, celui où l'on fixe N et on fait tendre g vers l'infini [Lem25].

4.3 Dualité de Schur–Weyl et couplages de partitions

La dualité de Schur–Weyl est une interaction entre les représentations du groupe unitaire et celle du groupe symétrique. Nous ne développerons pas directement les aspects algébriques de cette dualité, mais nous en exhiberons quelques manifestations combinatoires. Jusqu'à présent, nous avons exclusivement considéré les représentations de groupes de Lie compacts ; les définitions d'une représentation, de sa dimension ou encore de son caractère sont absolument identiques pour un groupe fini. La théorie des représentations des groupes finis ressemble par ailleurs beaucoup à celle des groupes compacts (lemme de Schur, orthogonalité des caractères, formule de Plancherel). Dans ce qui suit, nous aurons seulement besoin de comprendre certaines propriétés des partitions, qui représentent les classes d'équivalence des représentations irréductibles des groupes symétriques.

Définition 4.3.1. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Une *partition* de n est une famille $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ décroissante d'entiers strictement positifs : $\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_r > 0$. On note $\ell(\alpha) = r$ sa *longueur*, et $|\alpha| = n$ sa *taille*. On note également $\alpha \vdash n$.

L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des partitions de n est en bijection avec $\widehat{S}_n$ pour tout n , et on définit l'ensemble $\mathcal{P}$ des partitions comme l'union disjointe $\bigsqcup_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$.

4.3.1 Une mesure gaussienne sur $\widehat{U}(N)$

Nous allons à présent nous intéresser à une mesure de Gibbs sur le dual de $U(N)$, dont la fonction de partition est la même que celle de la mesure de Yang–Mills sur un tore. Elle provient du Théorème 3.5.5 appliqué à $g = 1$, qui nous dit que

$$Z_{U(N)}(1, t) = \sum_{\lambda \in \widehat{U}(N)} e^{-\frac{t}{2} c_2(\lambda)}.$$

Définition 4.3.2. Soit $t > 0$. On note $\mathcal{G}_{N,t}$ la mesure sur $\widehat{U}(N)$ définie par

$$\mathcal{G}_{N,t}(\lambda) = \frac{1}{Z_{U(N)}(1, t)} e^{-\frac{t}{2} c_2(\lambda)}, \quad \forall \lambda \in \widehat{U}(N). \quad (4.3.1)$$

Avant de nous intéresser au cas général, nous pouvons regarder le cas $N = 1$, qui correspond à une mesure sur $\mathbb{Z} = \widehat{U}(1)$. Les plus hauts poids de $U(1)$ sont simplement des entiers n ; un rapide calcul du nombre de Casimir montre que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $c_2(n) = n^2$. Ainsi,

$$\mathcal{G}_{1,t}(n) = \frac{1}{\theta(q_t)} e^{-\frac{t}{2} n^2}, \quad (4.3.2)$$

où $q_t = e^{-\frac{t}{2}}$. On reconnaît ici un analogue discret de la mesure gaussienne, et on peut même voir la mesure $\mathcal{G}_{N,t}$ comme une mesure gaussienne discrète dans le cône

$$\mathcal{C}_N = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 \geq \dots \geq x_N\},$$

appelé *chambre de Weyl*. On notera $\mathbb{E}_{N,t}$ l'espérance par rapport à la mesure $\mathcal{G}_{N,t}$. La mesure $\mathcal{G}_{1,t}$ partage une propriété importante avec la mesure gaussienne centrée : ses moments impairs sont nuls.

Proposition 4.3.1. Pour tout $t > 0$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_{1,t}[n^{2k}] = \frac{1}{\theta(q_t)} \left(q \frac{d}{dq} \right)^k \theta(q_t), \quad \mathbb{E}_{1,t}[n^{2k+1}] = 0. \quad (4.3.3)$$

Démonstration. Pour les moments d'ordre impair, c'est une conséquence du fait que $x \mapsto x^{2k+1} e^{-\frac{t}{2} x^2}$ est une fonction impaire. Pour les moments d'ordre pair, on déduit la formule par récurrence à partir du calcul

$$\left(q \frac{d}{dq} \right) q^{n^2} = n^2 q^{n^2}.$$

□

Exercice 4.3.1. Montrer que pour tous $0 < s < t$,

$$\mathbb{E}_{N,t} \left[e^{-\frac{sn}{N}} \right] - \theta(q_t) = O \left(\frac{1}{N^2} \right).$$

4.3.2 Couplage de partitions aléatoires

Nous allons étudier les interactions entre plus hauts poids de $U(N)$ et partitions. Un premier lien, assez naturel, est de “décaler” les coefficients d’un plus haut poids pour obtenir uniquement des coefficients positifs : si $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N) \in \widehat{U}(N)$, alors on peut écrire $\lambda = \Phi_N(\alpha, n)$, où $\alpha \in \mathcal{P}$ et $n \in \mathbb{Z}$ sont définis par $n = \lambda_N$, $\ell(\alpha) = \max\{i \leq N-1 : \lambda_i > n\}$, et

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_N, \quad \forall i \leq \ell(\alpha).$$

Cela permet notamment d’obtenir une bijection

$$\widehat{U}(N) \simeq \{\alpha \in \mathcal{P} : \ell(\alpha) \leq N-1\} \times \mathbb{Z}.$$

On note $\alpha = \alpha_\lambda$ la partition obtenue à partir de λ via cette construction. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a d’après la formule du caractère de Weyl

$$d_\lambda = s_\alpha(I_N).$$

Or, la dualité de Schur–Weyl permet de réécrire les fonctions de Schur à l’aide des caractères irréductibles du groupe symétrique. Pour distinguer les dimensions et caractères du groupe symétrique de ceux du groupe unitaire, on les notera respectivement d^α et χ^α avec la partition $\alpha \vdash n$ en exposant plutôt qu’en indice.

Théorème 4.3.2. *Soit $n, N \geq 1$ deux entiers fixés. On a, pour tout $\alpha \vdash n$,*

$$s_\alpha = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi^\alpha(\sigma) p_\sigma. \quad (4.3.4)$$

Si l’on applique le théorème précédent à I_N , on obtient une expression de la dimension de la représentation irréductible de $U(N)$ de plus haut poids λ comme un polynôme en N .

$$d_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \chi^\alpha(\sigma) N^{\ell(\sigma)}.$$

On constate notamment que $d_\lambda = \frac{d^\alpha}{n!} N^n + O(N^{n-1})$, de sorte que d_λ est de l’ordre de N^n , à condition que n ne dépende pas de N . On peut même montrer que ce polynôme est inversible si $n \leq N$, ce qui est toujours vrai pour N assez grand, et que d_λ^{-1} est une fraction rationnelle qui admet un développement de Laurent convergent [Col03].

Cependant, si l’on essaie de décrire le nombre de Casimir de λ à l’aide de α , cela n’est pas très satisfaisant :

$$\begin{aligned} c_2(\lambda) &= \frac{1}{N} \left(\sum_i \lambda_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \lambda_i - \lambda_j \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{\ell(\alpha)} (\alpha_i + n)^2 + (N - \ell(\alpha))n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq \ell(\alpha)} (\alpha_i - \alpha_j) + (N - \ell(\alpha)) \sum_{i=1}^{\ell(\alpha)} \alpha_i \right) \\ &= |\alpha| + n^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{\ell(\alpha)} \alpha_i^2 + (2n - \ell(\alpha))|\alpha| + \sum_{1 \leq i < j \leq \ell(\alpha)} (\alpha_i - \alpha_j) \right). \end{aligned}$$

En effet, la dépendance en N n'est pas claire, même dans le cas où $|\alpha| \leq N$. Prenons deux cas extrêmes : $\alpha_1 = (1, \dots, 1, 0)$, de sorte que $\ell(\alpha_1) = |\alpha_1| = N - 1$, et $\alpha_2 = (N - 1, 0, \dots, 0)$, de sorte que $\ell(\alpha_2) = 1$ et $|\alpha_2| = N - 1$. Alors

$$c_2(\alpha_1) = 2 - \frac{2}{N},$$

tandis que

$$c_2(\alpha_2) = 3N - 6 + \frac{3}{N},$$

ce qui montre que les deux ne contribuent pas du tout de la même manière. Intuitivement, comme on a une exponentielle décroissante, on s'attend à ce que les plus hauts poids qui contribuent à la limite quand $N \rightarrow \infty$ soient ceux dont le Casimir est petit, c'est-à-dire ici de l'ordre de $O(1)$; autrement, leur contribution sera exponentiellement petite quand N tend vers l'infini. On peut en fait montrer qu'il s'agit de ceux obtenus en perturbant un plus haut poids constant $(n, \dots, n)$ par deux petites partitions à gauche et à droite, ce que l'on peut qualifier de “plus haut poids presque plat”, un terme utilisé notamment dans [Lem22 ; Lem25]. Un exemple est donné en Figure 4.1.



FIGURE 4.1 – Un plus haut poids presque plat.

Pour étudier ces plus hauts poids presque plats, on va utiliser une représentation des plus hauts poids qui fait écho à une autre dualité de Schur–Weyl, étudiée notamment par Koike [Koi89] : tout élément de $\widehat{U}(N)$ peut en fait se décomposer en deux partitions et un plus haut poids constant.

Proposition 4.3.3. *Il existe une bijection*

$$\widehat{U}(N) \simeq \Lambda_N := \{(\alpha, \beta, n) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathbb{Z} : \ell(\alpha) \leq \lfloor (N+1)/2 \rfloor - 1, \ell(\beta) \leq N - \lfloor (N+1)/2 \rfloor\}.$$

La bijection est donnée par

$$\lambda_N(\alpha, \beta, n) = (\alpha_1 + n, \dots, \alpha_{\ell(\alpha)} + n, n, \dots, n, n - \beta_{\ell(\beta)}, \dots, n - \beta_1).$$

Démonstration. Il suffit d'exhiber la bijection réciproque :

$$(\lambda_N)^{-1}(\lambda) = (\alpha_\lambda, \beta_\lambda, n_\lambda),$$

où $n_\lambda = \lambda_{\lfloor (N+1)/2 \rfloor}$, et α_λ et β_λ sont les partitions définies par $(\alpha_\lambda)_i = \lambda_i - n_\lambda$, $(\beta_\lambda)_i = n - \lambda_{N-i}$. $\square$

Par commodité, on notera $A_N = \lfloor (N+1)/2 \rfloor - 1$ et $B_N = N - \lfloor (N+1)/2 \rfloor$, et on remarquera que $A_N, B_N \sim N/2$ quand $N \rightarrow \infty$.

Nous allons voir que cette bijection rend l'étude du Casimir bien plus agréable, mais avant cela, introduisons une observable qui va nous être utile : soit $\alpha \in \mathcal{P}$ une partition, vue comme un diagramme de Young, et $\square = (i, j)$ une case du diagramme, étiquetée par ses coordonnées (i -ème ligne, j -ème colonne) dans celui-ci. On définit son *contenu* comme le nombre $c(\square) = j - i$. On pose ensuite

$$K(\alpha) = \sum_{\square \in \alpha} c(\square) = \sum_{1 \leq i \leq \ell(\alpha)} \sum_{1 \leq j \leq \alpha_i} (j - i)$$

le *contenu total* de la partition. Le Casimir d'un plus haut poids obtenu comme $\lambda_N(\alpha, \beta, n)$ s'exprime explicitement, d'une manière qui isole la dépendance en N , ainsi que le montre le corollaire suivant, dont la démonstration constitue un exercice élémentaire.

Corollaire 4.3.4. *Pour tout $(\alpha, \beta, n) \in \Lambda_N$, on a*

$$c_2(\lambda_N(\alpha, \beta, n)) = |\alpha| + |\beta| + n^2 + \frac{2}{N}(K(\alpha) + K(\beta) + n(|\alpha| - |\beta|)). \quad (4.3.5)$$

La bijection λ_N permet également de décomposer la mesure $\mathcal{G}_{N,t}$ à l'aide de la mesure $\mathcal{G}_{1,t}$ sur $\mathbb{Z}$ et d'une autre mesure sur $\mathcal{P}$, appelée *mesure q -uniforme*.

Définition 4.3.3. Pour tout $q \in (0, 1)$, la mesure q -uniforme est la mesure de probabilité sur $\mathcal{P}$ définie par

$$\mathbb{P}(\alpha) = \phi(q)q^{|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathcal{P},$$

où $\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par le produit infini (convergent) $\phi(q) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)$.

Le résultat suivant, qui est un des résultats principaux de [LM25], explicite les plus hauts poids de loi $\mathcal{G}_{N,t}$ comme des couplages de partitions aléatoires, et implique la convergence de la fonction de partition de Yang–Mills sur le tore.

Théorème 4.3.5 ([LM25]). *Soit $N \geq 1$ un entier et $t > 0$ un nombre réel. Si $\lambda \sim \mathcal{G}_{N,t}$, alors pour toute fonction $F : \widehat{\mathcal{U}}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée,*

$$\mathbb{E}_{N,t}[F(\lambda)] = \frac{\theta(q_t)}{Z_{\mathcal{U}(N)}(1, t)\phi(q_t)^2} \mathbb{E}[F(\lambda_N(\alpha, \beta, n))q_t^{\frac{2}{N}(K(\alpha)+K(\beta)+n(|\alpha|-|\beta|))} \mathbf{1}_{\Lambda_N}(\alpha, \beta, n)], \quad (4.3.6)$$

où $q_t = e^{-t/2}$, et (α, β, n) sont des variables aléatoires indépendantes telles que α, β sont q_t -uniformes et $n \sim \mathcal{G}_{1,t}$. De plus,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{\mathcal{U}(N)}(1, t) = \frac{\theta(q_t)}{\phi(q_t)^2}. \quad (4.3.7)$$

En utilisant les mêmes outils que ceux permettant de démontrer ce théorème, on peut même démontrer que $Z_{\mathcal{U}(N)}(1, t)$ admet un développement asymptotique à tout ordre quand $N \rightarrow \infty$, et que les coefficients font intervenir des nombres de Hurwitz, qui énumèrent les revêtements ramifiés du tore, mais cela dépasse le cadre de ce cours.

4.4 Transition de Douglas–Kazakov

Dans cette section finale, nous présentons sans démonstration ce qu’il se passe dans le cas de la sphère, soit quand $g = 0$. Il se trouve que dans ce cas précis, la fonction de partition $Z_{U(N)}(0, t)$ diverge quand N tend vers l’infini : on peut vérifier que

$$Z_{U(N)}(0, t) = \frac{e^{\frac{t}{24}(N^2-1) + N(N-1) \log N}}{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (j-i)^2} \sum_{\lambda \in \widehat{U}(N)} e^{-N^2 \mathcal{J}_t(\widehat{\mu}_\lambda)}, \quad (4.4.1)$$

où $\widehat{\mu}_\lambda$ est la mesure empirique des plus hauts poids (modulo un changement d’échelle) :

$$\widehat{\mu}_\lambda = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i + \frac{N+1}{2} - i},$$

et $\mathcal{J}_t$ est une fonctionnelle sur l’espace des mesures de probabilités boréliennes sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\mathcal{J}_t(\mu) = - \iint_{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq y} \log |x-y| \mu(dx) \mu(dy) + \frac{t}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

Ainsi, le “bon” régime est le suivant, postulé par Douglas et Kazakov [DK93] et démontré, entre autres, par Boutet de Monvel et Shcherbina [BS98], ainsi que par Lévy et Maïda [LM15].

Théorème 4.4.1. *Pour tout $t \geq 0$, la limite*

$$F(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log Z_{U(N)}(0, t) \quad (4.4.2)$$

existe. Elle définit une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \infty)$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, \pi^2) \cup (\pi^2, \infty)$, dont la dérivée troisième admet une discontinuité en π^2 .

Ce saut de la dérivée troisième de F s’interprète, physiquement, comme une transition de phase. Nous ne développons pas ici les différentes démonstrations existantes, qui utilisent des techniques un peu différentes de celles présentées ici – il s’agit plutôt de techniques de grandes déviations.

Bibliographie

- [AL94] Abhay ASHTEKAR et Jerzy LEWANDOWSKI. “Representation theory of analytic holonomy C^* -algebras”. *Knots and quantum gravity (Riverside, CA, 1993)*. T. 1. Oxford Lecture Ser. Math. Appl. Oxford Univ. Press, New York, 1994, p. 21-61.
- [BD95] Theodor BRÖCKER et Tammo tom DIECK. *Representations of compact Lie groups*. T. 98. Graduate Texts in Mathematics. Translated from the German manuscript, Corrected reprint of the 1985 translation. Springer-Verlag, New York, 1995, p. x+313. ISBN : 0-387-13678-9.
- [Bis15] Jean-Michel BISMUT. “Hypoelliptic Laplacian and probability”. *J. Math. Soc. Japan* 67.4 (2015), p. 1317-1357. ISSN : 0025-5645. DOI : [10.2969/jmsj/06741317](https://doi.org/10.2969/jmsj/06741317). URL : <https://doi.org/10.2969/jmsj/06741317>.
- [BL21] Thomas BUDZINSKI et Baptiste LOUF. “Local limits of uniform triangulations in high genus”. *Invent. Math.* 223.1 (2021), p. 1-47. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/s00222-020-00986-3](https://doi.org/10.1007/s00222-020-00986-3). URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-020-00986-3>.
- [BS98] Anne BOUTET DE MONVEL et Mariya SHCHERBINA. “On free energy in two-dimensional $U(n)$ -gauge field theory on the sphere”. *Teoret. Mat. Fiz.* 115.3 (1998), p. 389-401. ISSN : 0564-6162. DOI : [10.1007/BF02575490](https://doi.org/10.1007/BF02575490). URL : <https://doi.org/10.1007/BF02575490>.
- [Bum13] Daniel BUMP. *Lie groups*. Second. T. 225. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2013, p. xiv+551. ISBN : 978-1-4614-8023-5; 978-1-4614-8024-2.
- [CG25] Ilya CHEVYREV et Christophe GARBAN. “Villain action in lattice gauge theory”. *J. Stat. Phys.* 192.3 (2025), Paper No. 38, 15. ISSN : 0022-4715. DOI : [10.1007/s10955-025-03420-1](https://doi.org/10.1007/s10955-025-03420-1). URL : <https://doi.org/10.1007/s10955-025-03420-1>.
- [Cha19] Sourav CHATTERJEE. “Yang-Mills for probabilists”. *Probability and analysis in interacting physical systems*. T. 283. Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2019, p. 1-16.
- [Cha20] Sourav CHATTERJEE. “Wilson loops in Ising lattice gauge theory”. *Comm. Math. Phys.* 377.1 (2020), p. 307-340. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/s00220-020-03738-9](https://doi.org/10.1007/s00220-020-03738-9). URL : <https://doi.org/10.1007/s00220-020-03738-9>.

- [Col03] Benoît COLLINS. “Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability”. *Int. Math. Res. Not.* 17 (2003), p. 953-982. ISSN : 1073-7928. DOI : [10.1155/S107379280320917X](https://doi.org/10.1155/S107379280320917X). URL : <https://doi.org/10.1155/S107379280320917X>.
- [DK93] Michael R. DOUGLAS et Vladimir A. KAZAKOV. “Large N phase transition in continuum QCD in two-dimensions”. *Phys. Lett. B* 319 (1993), p. 219-230. DOI : [10.1016/0370-2693\(93\)90806-S](https://doi.org/10.1016/0370-2693(93)90806-S). arXiv : [hep-th/9305047](https://arxiv.org/abs/hep-th/9305047).
- [DL23] Antoine DAHLQVIST et Thibaut LEMOINE. “Large N limit of Yang-Mills partition function and Wilson loops on compact surfaces”. *Probab. Math. Phys.* 4.4 (2023), p. 849-890.
- [DL25] Antoine DAHLQVIST et Thibaut LEMOINE. “Large N limit of the Yang-Mills measure on compact surfaces II: Makeenko-Migdal equations and the planar master field”. *Forum Math. Sigma* 13 (2025), Paper No. e17. DOI : [10.1017/fms.2024.152](https://doi.org/10.1017/fms.2024.152). URL : <https://doi.org/10.1017/fms.2024.152>.
- [DN20] Antoine DAHLQVIST et James R. NORRIS. “Yang-Mills measure and the master field on the sphere”. *Comm. Math. Phys.* 377.2 (2020), p. 1163-1226. ISSN : 0010-3616. DOI : [10.1007/s00220-020-03773-6](https://doi.org/10.1007/s00220-020-03773-6). URL : <https://doi.org/10.1007/s00220-020-03773-6>.
- [Eyn16] Bertrand EYNARD. *Counting surfaces*. T. 70. Progress in Mathematical Physics. CRM Aisenstadt chair lectures. Birkhäuser/Springer, [Cham], 2016, p. xvii+414.
- [Far08] Jacques FARAUT. *Analysis on Lie groups*. T. 110. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. An introduction. Cambridge University Press, Cambridge, 2008, p. x+302. ISBN : 978-0-521-71930-8.
- [FLV23] Malin P. FORSSTRÖM, Jonatan LENELLS et Fredrik VIKLUND. “Wilson loops in the abelian lattice Higgs model”. *Probab. Math. Phys.* 4.2 (2023), p. 257-329. ISSN : 2690-0998. DOI : [10.2140/pmp.2023.4.257](https://doi.org/10.2140/pmp.2023.4.257). URL : <https://doi.org/10.2140/pmp.2023.4.257>.
- [GM21] Ewain GWYNNE et Jason MILLER. “Percolation on uniform quadrangulations and SLE₆ on $\sqrt{8/3}$ -Liouville quantum gravity”. *Astérisque* 429 (2021), p. vii+242. ISSN : 0303-1179.
- [Hal15] Brian HALL. *Lie groups, Lie algebras, and representations*. Second. T. 222. Graduate Texts in Mathematics. An elementary introduction. Springer, Cham, 2015, p. xiv+449. ISBN : 978-3-319-13466-6; 978-3-319-13467-3.
- [Ken11] Richard KENYON. “Spanning forests and the vector bundle Laplacian”. *Ann. Probab.* 39.5 (2011), p. 1983-2017. ISSN : 0091-1798.
- [Kna02] Anthony W. KNAPP. *Lie groups beyond an introduction*. Second. T. 140. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002, p. xviii+812. ISBN : 0-8176-4259-5.
- [Koi89] Kazuhiko KOIKE. “On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: by means of the universal characters”. *Adv. Math.* 74.1 (1989), p. 57-86. ISSN : 0001-8708. DOI : [10.1016/0001-8708\(89\)90004-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(89)90004-2). URL : [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(89\)90004-2](https://doi.org/10.1016/0001-8708(89)90004-2).

- [Kon92] Maxim KONTSEVICH. “Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function”. *Comm. Math. Phys.* 147.1 (1992), p. 1-23.
- [Lab13] François LABOURIE. *Lectures on representations of surface groups*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2013, p. viii+138. ISBN : 978-3-03719-127-9.
- [Lem22] Thibaut LEMOINE. “Large N behaviour of the two-dimensional Yang-Mills partition function”. *Combin. Probab. Comput.* 31.1 (2022), p. 144-165.
- [Lem25] Thibaut LEMOINE. “Almost flat highest weights and application to Wilson loops on compact surfaces”. *Probab. Theory Related Fields* (2025).
- [Lév04] Thierry LÉVY. “Wilson loops in the light of spin networks”. *J. Geom. Phys.* 52.4 (2004), p. 382-397. ISSN : 0393-0440.
- [Lév10] Thierry LÉVY. “Two-dimensional Markovian holonomy fields”. *Astérisque* 329 (2010), p. 172.
- [Lév17] Thierry LÉVY. “The master field on the plane”. *Astérisque* 388 (2017), p. ix+201. ISSN : 0303-1179.
- [Lév20] Thierry LÉVY. “Two-dimensional quantum Yang-Mills theory and the Makeenko-Migdal equations”. *Frontiers in analysis and probability—in the spirit of the Strasbourg-Zürich meetings*. Springer, Cham, 2020, p. 275-325.
- [LM10] Thierry LÉVY et Mylène MAÏDA. “Central limit theorem for the heat kernel measure on the unitary group”. *J. Funct. Anal.* 259.12 (2010), p. 3163-3204. ISSN : 0022-1236. DOI : [10.1016/j.jfa.2010.08.005](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.08.005). URL : <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.08.005>.
- [LM15] Thierry LÉVY et Mylène MAÏDA. “On the Douglas-Kazakov phase transition. Weighted potential theory under constraint for probabilists”. *Modélisation Aléatoire et Statistique—Journées MAS 2014*. T. 51. ESAIM Proc. Surveys. EDP Sci., Les Ulis, 2015, p. 89-121. DOI : [10.1051/proc/201551006](https://doi.org/10.1051/proc/201551006). URL : <https://doi.org/10.1051/proc/201551006>.
- [LM25] Thibaut LEMOINE et Mylène MAÏDA. “Gaussian measure on the dual of $U(N)$, random partitions, and topological expansion of the partition function”. *Ann. Proba.* (2025). to appear.
- [LS17] Thierry LÉVY et Ambar SENGUPTA. “Four chapters on low-dimensional gauge theories”. *Stochastic geometric mechanics*. T. 202. Springer Proc. Math. Stat. Springer, Cham, 2017, p. 115-167.
- [LZ04] Sergei K. LANDO et Alexander K. ZVONKIN. *Graphs on surfaces and their applications*. T. 141. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II. Springer-Verlag, Berlin, 2004, p. xvi+455.
- [Mig75] Alexander A. MIGDAL. “Recursion Equations in Gauge Theories”. *Sov. Phys. JETP* 42 (1975). Sous la dir. d’I. M. KHALATNIKOV et V. P. MINEEV, p. 413.

- [MP19] Michael MAGEE et Doron PUDER. “Matrix group integrals, surfaces, and mapping class groups I: $\mathcal{U}(n)$ ”. *Invent. Math.* 218.2 (2019), p. 341-411. ISSN : 0020-9910. DOI : [10.1007/s00222-019-00891-4](https://doi.org/10.1007/s00222-019-00891-4). URL : <https://doi.org/10.1007/s00222-019-00891-4>.
- [Sen03] Ambar N. SENGUPTA. “The volume measure for flat connections as limit of the Yang-Mills measure”. *J. Geom. Phys.* 47.4 (2003), p. 398-426. ISSN : 0393-0440.
- [Sen08] Ambar N. SENGUPTA. “Gauge theory in two dimensions: topological, geometric and probabilistic aspects”. *Stochastic analysis in mathematical physics*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, p. 109-129.
- [Sin95] I. M. SINGER. “On the master field in two dimensions”. *Functional analysis on the eve of the 21st century, Vol. 1 (New Brunswick, NJ, 1993)*. T. 131. Progr. Math. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995, p. 263-281.
- [SSZ25] Hao SHEN, Scott A. SMITH et Rongchan ZHU. “Makeenko-Migdal equations for 2D Yang-Mills: from lattice to continuum” (2025). arXiv : [2412.15422](https://arxiv.org/abs/2412.15422) [math-ph]. URL : <https://arxiv.org/abs/2412.15422>.
- [Sti93] John STILLWELL. *Classical topology and combinatorial group theory*. Second. T. 72. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993, p. xii+334.
- [t H74] Gerard 't HOOFT. “A Planar Diagram Theory for Strong Interactions”. *Nucl. Phys. B* 72 (1974). Sous la dir. de J. C. TAYLOR, p. 461.
- [Wil74] Kenneth G. WILSON. “Confinement of quarks”. *Phys. Rev. D* 10 (8 oct. 1974), p. 2445-2459. DOI : [10.1103/PhysRevD.10.2445](https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445). URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>.
- [Wit91] Edward WITTEN. “On quantum gauge theories in two dimensions”. *Comm. Math. Phys.* 141.1 (1991), p. 153-209. ISSN : 0010-3616.
- [Zag94] Don ZAGIER. “Values of zeta functions and their applications”. *First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992)*. T. 120. Progr. Math. Birkhäuser, Basel, 1994, p. 497-512.